14　('06　愛媛大)　【難易度】… 標準

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1 = b_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + 2, \quad b_{n+1} = a_n + b_n + \frac{4}{3} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定める．

(1)　一般項 a_n, b_n を求めよ．

(2)　関数の列 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を

$$\begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{x+2} f_n(t)\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots) \end{cases}$$

によって定める．

(ア)　$f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ．

(イ)　すべての自然数 n について，$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n$ が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ．

【テーマ】：関数列

方針

(1) は，与えられた漸化式から $\{a_n\}$ が等差数列，$\{b_n\}$ に関する漸化式は，階差型の漸化式であることがわかります．(2) は，関数が漸化式の形で与えられているので，(ア) は具体的に代入して求められますし，(イ) は問題文にあるように数学的帰納法を用いて示しましょう．

解答

(1)　数列 $\{a_n\}$ は，初項 0，公差 2 の等差数列であるから，

$$a_n = 0 + (n-1)\cdot 2 \iff \boldsymbol{a_n = 2n - 2}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

また，

$$b_{n+1} = b_n + 2n - 2 + \frac{4}{3} \iff b_{n+1} = b_n + 2n - \frac{2}{3}$$

$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(2k - \frac{2}{3}\right) \\ &= 2\cdot\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{2}{3}(n-1) \\ &= n^2 - \frac{5}{3}n + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき，$b_1 = 1 - \dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{3} = 0$ であるから，$n = 1$ のときも成り立つ．よって，

$$\boldsymbol{b_n = n^2 - \frac{5}{3}n + \frac{2}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　**【証明】**

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\int_x^{x+2} f_n(t)\,dt \cdots\cdots ①$$

(ア) 与えられた漸化式より,

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{2}\int_x^{x+2} t^2\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\,\frac{1}{3}t^3\,\right]_x^{x+2} \\ &= \frac{1}{6}\{(x+2)^3-x^3\} \\ &= \boldsymbol{x^2+2x+\frac{4}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{1}{2}\int_x^{x+2}\left(t^2+2t+\frac{4}{3}\right)dt \\ &= x^2+2x+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left[\,t^2+\frac{4}{3}t\,\right]_x^{x+2} \\ &= x^2+2x+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\{(x+2)^2-x^2\}+\frac{2}{3}(x+2-x) \\ &= \boldsymbol{x^2+4x+\frac{14}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

(イ) (i) $n=1$ のとき, $f_1(x)=x^2$ であるから, $a_1=b_1=0$ であることより成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき, $f_k(x)=x^2+a_kx+b_k$ が成り立つと仮定すると,

$n=k+1$ のときは, ① に $n=k$ を代入して,

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \frac{1}{2}\int_x^{x+2} f_k(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_x^{x+2}(t^2+a_kt+b_k)\,dt \\ &= x^2+2x+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left[\,\frac{1}{2}a_kt^2+b_kt\,\right]_x^{x+2} \\ &= x^2+2x+\frac{4}{3}+\frac{1}{4}a_k\{(x+2)^2-x^2\}+\frac{1}{2}b_k(x+2-x) \\ &= x^2+2x+\frac{4}{3}+\frac{1}{4}a_k(4x+4)+b_k \\ &= x^2+(a_k+2)x+a_k+b_k+\frac{4}{3} \end{aligned}$$

より, $a_{k+1}=a_k+2,\ b_{k+1}=a_k+b_k+\dfrac{4}{3}$ であることより $n=k+1$ のときも成り立つ.

以上より, すべての自然数 n に対して, $f_n(x)=x^2+a_nx+b_n$ が成り立つことが示された. **(証明終)**

◇ ♡

解説

(2) は, 漸化式の形で与えられた関数列を解く問題です. 漸化式と数学的帰納法は仕組みが同じなので, 問題文で数学的帰納法で証明せよと書かれていなくても自分で気付けるようになっておく必要があります. ちなみに, (1) の結果から,

$$f_n(x)=x^2+2(n-1)x+n^2-\frac{5}{3}n+\frac{2}{3}$$

であることがわかります. また, $f_3(x)$ の計算ですが, $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{x+2} t^2\,dt$ は, $f_2(x)$ で計算をしているので, その結果を用いています. (イ) における数学的帰納法での証明の途中でも利用しています.