12 ('10 千葉大) 【難易度】… 標準

a, b は実数とする．関数 $f(x)$ は，$f(x)=a\sin x+b\cos x+\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$ を満たし，かつ，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ における最大値は 2π である．このとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$ を最小にする a, b の値と，その最小値を求めよ．

【テーマ】：定積分で表された関数

方針

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$ は定数なので，A と置きます．そうすれば，A の値を求めることができるため，$f(x)$ が決定できます．

♣ ♠

解答

$A=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$ とおくと，$f(x)=a\sin x+b\cos x+A$ であるから，

$$\begin{aligned}A&=\int_{-\pi}^{\pi}(a\sin t+b\cos t+A)\cos t\,dt\\&=\int_{-\pi}^{\pi}(a\sin t\cos t+b\cos^2 t+A\cos t)\,dt\end{aligned}$$

ここで，$\sin t\cos t$ は奇関数，$\cos^2 t$, $\cos t$ は偶関数であるから，

$$\begin{aligned}A&=2\int_{0}^{\pi}(b\cos^2 t+A\cos t)\,dt\\&=\int_{0}^{\pi}\{b(1+\cos 2t)+2A\cos t\}\,dt\\&=\left[\,b\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+2A\sin t\,\right]_0^{\pi}\\&=b\pi\end{aligned}$$

よって，$f(x)=a\sin x+b\cos x+b\pi$ である．

$$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)+b\pi\quad\left(\text{ただし，}\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ において，$-1 \leqq \sin(x+\alpha) \leqq 1$ であるから，

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leqq \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha) \leqq \sqrt{a^2+b^2}$$

$$-\sqrt{a^2+b^2}+b\pi \leqq \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)+b\pi \leqq \sqrt{a^2+b^2}+b\pi$$

$$-\sqrt{a^2+b^2}+b\pi \leqq f(x) \leqq \sqrt{a^2+b^2}+b\pi$$

$f(x)$ の最大値は 2π であるから，

$$\sqrt{a^2+b^2}+b\pi=2\pi \iff \sqrt{a^2+b^2}=(2-b)\pi \cdots\cdots ①$$

である．

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}(a\sin x+b\cos x+b\pi)^2\,dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x+b^2\pi^2+2ab\sin x\cos x+2b^2\pi\cos x+2ab\pi\sin x)\,dx\\&=2\int_0^{\pi}(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x+b^2\pi^2+2b^2\pi\cos x)\,dx\\&=2\int_0^{\pi}\left(a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+b^2\pi^2+2b^2\pi\cos x\right)dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left[\ \frac{a^2}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{b^2}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + b^2\pi^2 x + 2b^2\pi\sin x\ \right]_0^{\pi}\\
&= 2\left(\frac{a^2}{2}\pi + \frac{b^2}{2}\pi + b^2\pi^3\right)\\
&= (a^2+b^2)\pi + 2b^2\pi^3\\
&= (2-b)^2\pi^3 + 2b^2\pi^3 \quad (\because\ ①)\\
&= \pi^3(3b^2-4b+4)\\
&= \pi^3\left\{3\left(b^2-\frac{4}{3}b\right)+4\right\}\\
&= \pi^3\left\{3\left(b-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}\right\}
\end{aligned}
$$

よって，$b=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$ は最小値 $\dfrac{8}{3}\pi^3$ をとる．また，このとき，① から a の値は，

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2=(2-b)^2\pi^2 \iff a^2 &= (2-b)^2\pi^2 - b^2\\
&= \left(2-\frac{2}{3}\right)^2\pi^2 - \frac{4}{9}\\
&= \frac{16}{9}\pi^2 - \frac{4}{9}\\
&= \frac{4}{9}(4\pi^2-1)
\end{aligned}
$$

よって，$a=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{4\pi^2-1}$ である．

以上より，

最小値：$\boldsymbol{\dfrac{8}{3}\pi^3}$ $\left(\boldsymbol{a=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{4\pi^2-1},\quad b=\dfrac{2}{3}}\right)$……(答)

◇ ♡

解説

前半は，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$ が定数であることがポイントです．定数ということは x とは無関係なので，A とおきます．そうすると $f(x)$ が A を用いて表せるので，この $f(x)$ を $f(t)$ として，$A=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$ へ代入すれば A の値が求まります．教科書レベルの問題なので，確実にできるようにしておきましょう！ $f(x)$ が決まれば，最大値が 2π という条件から a, b に関する関係式が求められます．$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$ を計算すると a, b の式になるため，先ほど求めた a, b の関係式を用いて a を消去すれば b に関する式となり，最小値を求めることができるようになります．方針を立てるのに戸惑うかもしれませんが，与えられた条件をうまく使って一つずつ処理をしていきましょう！