11 （′14　一橋大） 【難易度】 … 標準

n を 7 以上の整数とする．1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 個の球を袋に入れる．袋から無作為に取り出した 4 個の球の番号がすべて奇数である確率を p_n とする．

（1） p_n を n を用いて表せ．

（2） $p_n < 0.05$ となる n をすべて求めよ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

(1) は，n の偶奇によって場合分けを行います．(2) は，(1) の結果から不等式を計算しましょう．

♣ ♠

解答

（1）

（i） n が奇数のとき，1 から n までの間に奇数は $\dfrac{n+1}{2}$ 個あるので，

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{{}_{\frac{n+1}{2}}\mathrm{C}_4}{{}_n\mathrm{C}_4} \\
&= \frac{\frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\left(\frac{n+1}{2}-2\right)\left(\frac{n+1}{2}-3\right)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
&= \frac{(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)}{16n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
&= \frac{(n+1)(n-5)}{16n(n-2)}
\end{aligned}$$

（ii） n が偶数のとき，1 から n までの間に偶数は $\dfrac{n}{2}$ 個あるので，

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{{}_{\frac{n}{2}}\mathrm{C}_4}{{}_n\mathrm{C}_4} \\
&= \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-3\right)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
&= \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)}{16n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
&= \frac{(n-4)(n-6)}{16(n-1)(n-3)}
\end{aligned}$$

以上より，求める確率 p_n は，

$$\boldsymbol{p_n = \begin{cases} \dfrac{(n+1)(n-5)}{16n(n-2)} & (n\ \text{が奇数}) \\ \dfrac{(n-4)(n-6)}{16(n-1)(n-3)} & (n\ \text{が偶数}) \end{cases}}\ \cdots\cdots(\text{答})$$

（2） （1）より，n の偶奇で場合分けをして考える．

（i） n が奇数のとき，

$$\begin{aligned}
p_n < 0.05 &\iff \frac{(n+1)(n-5)}{16n(n-2)} < \frac{1}{20} \\
&\iff 5(n+1)(n-5) < 4n(n-2) \\
&\iff n(n-12) < 25
\end{aligned}$$

であるから，これを満たす 7 以上の奇数は，$n=7,\ 9,\ 11,\ 13$ のみである．

(ii) n が偶数のとき，

$$\begin{aligned} p_n < 0.05 &\iff \frac{(n-4)(n-6)}{16(n-1)(n-3)} < \frac{1}{20} \\ &\iff 5(n-4)(n-6) < 4(n-1)(n-3) \\ &\iff n(34-n) > 108 \end{aligned}$$

であるから，これを満たす 7 以上の偶数は，$n=8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ 22,\ 24,\ 26,\ 28,\ 30$ のみである．

以上より，求める 7 以上の自然数 n は，

$$\boldsymbol{n=7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ 22,\ 24,\ 26,\ 28,\ 30}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

n が偶数のときと奇数のときで p_n の計算方法が異なるため場合分けをする必要があります．このことに気がつけばあとは計算だけなので，方針で悩むことは無いでしょう．(2) では，$p_n < 0.05$ を満たす自然数をすべて求めよとあるので，不等式を立式して解けばよいのですが，導かれる 2 次不等式は因数分解して解くことができないので，解の公式で求める必要が出てきます．しかし，考えているのは自然数ですから解の公式で正確な不等式の解を求める必要はありません．出てきた不等式を満たす自然数をすべて探し当てればよいだけです．