10 （′14　静岡大） **【難易度】** … 標準

a を定数とする．2 次関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=6(a+1)x^2-12x\int_0^1 f(t)\,dt+5a-2$ を満たすとする．このとき，2 次関数 $f(x)$ と 3 次関数 $g(x)=-4x^3+f(x)$ について，次の問いに答えよ．

（1）　定積分 $\int_0^1 f(t)\,dt$ を a を用いて表せ．

（2）　3 次関数 $g(x)$ の増減を調べ，極値があればその極値を求めよ．

（3）　3 次方程式 $g(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

(1) は，積分方程式なので，$A=\int_0^1 f(t)\,dt$ とおきます．(2) は，$g(x)$ を微分して $g'(x)=0$ となる x の値を求め，増減表をかきますが，a の値による場合分けが必要となります．(3) は，$g(1)g(a)<0$ となる場合を考えましょう．

♣ ♠

解答

（1）　$A=\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと，

$$f(x)=6(a+1)x^2-12Ax+5a-2$$

であるから，

$$\begin{aligned} A&=\int_0^1\{6(a+1)t^2-12At+5a-2\}\,dt\\ &=\Big[\,2(a+1)t^3-6At^2+(5a-2)t\,\Big]_0^1\\ &=2(a+1)-6A+5a-2\\ 7A&=7a \end{aligned}$$

よって，$A=a$ となるので，$\int_0^1 f(t)\,dt=\boldsymbol{a}$……(**答**)

（2）　(1) より，

$$g(x)=-4x^3+6(a+1)x^2-12ax+5a-2$$

であるから，

$$\begin{aligned} g'(x)&=-12x^2+12(a+1)x-12a\\ &=-12\{x^2-(a+1)x+a\}\\ &=-12(x-1)(x-a) \end{aligned}$$

(i)　$a=1$ のとき，$g'(x)=-12(x-1)^2\leqq 0$ となり，$g(x)$ は単調減少である．ゆえに，極値はない．

(ii)　$a<1$ のとき，$g'(x)=0$ となるとき，$x=1,\,a$ であるから，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	a	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$$\begin{aligned} g(a) &= -4a^3+6(a+1)a^2-12a^2+5a-2 \\ &= 2a^3-6a^2+5a-2 \\ g(1) &= -4+6(a+1)-12a+5a-2 \\ &= -a \end{aligned}$$

(iii) $a>1$ のとき，$g'(x)=0$ となるとき，$x=1,\ a$ であるから，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

以上より，

$$\begin{cases} \text{(i)}\ \ \boldsymbol{a=1}\ \textbf{のとき，}\ \boldsymbol{g(x)}\ \textbf{は単調減少} \\ \text{(ii)}\ \ \boldsymbol{a<1}\ \textbf{のとき，}\ \begin{cases} \textbf{極大値}\ \boldsymbol{-a} & \boldsymbol{(x=1)} \\ \textbf{極小値}\ \boldsymbol{2a^3-6a^2+5a-2} & \boldsymbol{(x=a)} \end{cases} \quad \cdots\cdots\textbf{(答)} \\ \text{(iii)}\ \ \boldsymbol{a>1}\ \textbf{のとき，}\ \begin{cases} \textbf{極大値}\ \boldsymbol{2a^3-6a^2+5a-2} & \boldsymbol{(x=a)} \\ \textbf{極小値}\ \boldsymbol{-a} & \boldsymbol{(x=1)} \end{cases} \end{cases}$$

(3) $g(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつ条件は,

$$a \neq 1 \text{ かつ } g(1)g(a)<0$$

である．(2) より,

$$(2a^3-6a^2+5a-2)(-a)<0$$

$$a(a-2)(2a^2-2a+1)>0 \quad (\because\ \ 2a^3-6a^2+5a-2=(a-2)(2a^2-2a+1))$$

ここで，$2a^2-2a+1=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$ であるから,

$$a(a-2)>0$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{a<0,\ 2<a}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

(1) は，教科書レベルの積分方程式の問題です．$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ が定数であることに着目して，A とおきます．
(2) は，$g'(x)=-12(x-1)(x-a)$ となりますが，a の値が 1 より大きいか小さいかで場合分けが必要になります．また，$a=1$ のときだけは，$g'(x)=0$ が重解をもつので，この場合も忘れないようにしましょう．(3) は，3 次方程式が異なる 3 つの実数解をもつための条件を考えます．これは，3 次関数 $y=g(x)$ が x 軸と異なる 3 点で交わるときなので，極大値と極小値が異符号であればよいことがわかります．つまり,

(極大値) >0 かつ (極小値) <0

となればよいのですが，(2) で場合分けをしているので，それぞれの場合で考えるのは面倒です．そこで,

(極大値)×(極小値) <0

とします．これならば，場合分けをする必要がなくなり比較的楽に a の値を求めることができます．ただし，次数が上がるため解答にあるように，確実に符号がわかる部分は，それを利用して次数を下げます．