7 ('13 山口大) 【難易度】… やや難

実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = [\sqrt{n}] \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められるとき，次の問いに答えなさい．

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めなさい．

(2) n を自然数とする．

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$$

とするとき，次の等式を証明しなさい．

$$S_n = \left(n + \frac{5}{6}\right)a_n - \frac{1}{2}{a_n}^2 - \frac{1}{3}{a_n}^3$$

【テーマ】：格子点問題

方針

(1) は，ガウス記号 $[\ x\ ]$ の意味を理解できれば計算するだけです．(2) は，S_n が何を表しているかを考えます．格子点の個数として考えると計算方法が見えてくるでしょう．

♣ ♠

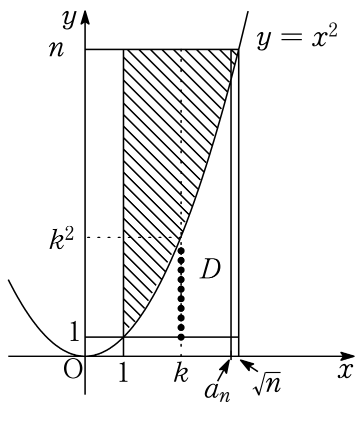
解答

(1) $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$ であるから，

$$\boldsymbol{a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1,\ a_4 = 2} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

(2) **【証明】**

$y = x^2\ (x \geqq 0)$ のグラフを考える．$y = k$ のとき，$x = \sqrt{k}$ であるから，S_n は，下図斜線部分の格子点の個数を表している．$a_n = [\sqrt{n}]$ であることから，領域 $1 \leqq x \leqq a_n$, $1 \leqq y \leqq n$ 内にある格子点の個数は，na_n 個であることがわかるので，領域 $1 \leqq y < x^2$, $1 \leqq x \leqq a_n$ 内にある格子点の個数を求める．



この領域を D とする．領域 D 内にあり，$x = k\ (1 \leqq k \leqq a_n)$ 上の格子点の個数を $L(k)$ とすると，

$$L(k) = k^2 - 1$$

である．よって，領域 D 内の格子点の個数 N は，

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=2}^{a_n}(k^2-1) = \sum_{k=1}^{a_n}(k^2-1) \\ &= \frac{1}{6}a_n(a_n+1)(2a_n+1) - a_n \\ &= \frac{1}{3}{a_n}^3 + \frac{1}{2}{a_n}^2 + \frac{1}{6}a_n - a_n \\ &= \frac{1}{3}{a_n}^3 + \frac{1}{2}{a_n}^2 - \frac{5}{6}a_n \end{aligned}$$

である．ゆえに，求める格子点の個数は，

$$\begin{aligned} S_n &= na_n - N \\ &= na_n - \left(\frac{1}{3}{a_n}^3 + \frac{1}{2}{a_n}^2 - \frac{5}{6}a_n\right) \\ &= \left(n + \frac{5}{6}\right)a_n - \frac{1}{2}{a_n}^2 - \frac{1}{3}{a_n}^3 \end{aligned}$$

となるので，示された． **（証明終）**

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

（2）では，S_n の意味を考えると方針が立ちやすくなります．本問は，領域 D 内の格子点の個数を求めれば長方形の格子点の個数からそれを除くことで斜線部分の格子点の個数が求められます．注意したいのは，$y = x^2$ 上の点は除くということです．したがって，

$$N = \sum_{k=2}^{a_n}(k^2 - 1)$$

となりますが，$k = 1$ のときは $k^2 - 1 = 0$ なので，

$$\sum_{k=2}^{a_n}(k^2 - 1) = \sum_{k=1}^{a_n}(k^2 - 1)$$

となります．