6 （'10 京都工芸繊維大） 【難易度】 … 標準

（1） 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ を求めよ．

（2） 実数 a に対して定積分 $\displaystyle\int_0^2 \left|\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{1+e^a}\right| dx$ の値を $S(a)$ とおく．a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

【テーマ】：定積分の最小値

方針

(1) は，分子分母に e^{-x} をかけることで $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|+C$ の公式が使えるようになります．
(2) は x の値が a より大きいか小さいかによって，絶対値内の符号が変化するので，そこで場合分けを行いましょう．

♣ ♠

解答

（1） 分子分母に e^{-x} をかけて，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x}\,dx &= \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx \\ &= \int \frac{-(e^{-x}+1)'}{e^{-x}+1}\,dx \\ &= -\log(e^{-x}+1)+C \quad (\because\ e^{-x}+1>0) \\ &= -\log\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)+C \\ &= \boldsymbol{\log\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)+C} \quad \textbf{(}C\textbf{ は積分定数)……(答)} \\ &= \boldsymbol{x-\log(1+e^x)+C} \quad \textbf{（}C\textbf{ は積分定数） でも可}\end{aligned}$$

（2） 絶対値内の数式の符号で場合分けを行う．

（i） $0 \leqq x \leqq a$ のとき，$e^x \leqq e^a$ であるから，$\dfrac{1}{1+e^x} \geqq \dfrac{1}{1+e^a}$

（ii） $a \leqq x \leqq 2$ のとき，$e^x \geqq e^a$ であるから，$\dfrac{1}{1+e^x} \leqq \dfrac{1}{1+e^a}$

ゆえに，与えられた定積分の値は，

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_0^a \left(\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{1+e^a}\right)dx + \int_a^2 \left(-\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^a}\right)dx \\ &= \int_0^a \left(\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{1+e^a}\right)dx + \int_2^a \left(\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{1+e^a}\right)dx \\ &= \Big[\log\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)-\frac{1}{1+e^a}x\Big]_0^a + \Big[\log\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)-\frac{1}{1+e^a}x\Big]_2^a \\ &= \log\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right)-\frac{a}{1+e^a}-\log\left(\frac{e^0}{1+e^0}\right)+\log\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right)-\frac{a}{1+e^a}-\log\left(\frac{e^2}{1+e^2}\right)+\frac{2}{1+e^a} \\ &= 2\log\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right)-\frac{2(a-1)}{1+e^a}-\log\left(\frac{1}{2}\right)-\log\left(\frac{e^2}{1+e^2}\right) \\ &= 2\log\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right)-\frac{2(a-1)}{1+e^a}+\log\frac{2(1+e^2)}{e^2}\end{aligned}$$

となるので，a で微分すると，

$$\begin{aligned}S'(a) &= 2\cdot\frac{1+e^a}{e^a}\cdot\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right)' - \frac{2(1+e^a)-2(a-1)e^a}{(1+e^a)^2}\\ &= \frac{2(1+e^a)}{e^a}\cdot\frac{e^a(1+e^a)-e^a\cdot e^a}{(1+e^a)^2} - \frac{2(1+e^a)-2(a-1)e^a}{(1+e^a)^2}\\ &= \frac{2(1+e^a)}{(1+e^a)^2} - \frac{2(1+e^a)-2(a-1)e^a}{(1+e^a)^2}\\ &= \frac{2(a-1)e^a}{(1+e^a)^2}\end{aligned}$$

となる．よって，$S'(a)=0$ のとき，$a=1$ であるから，増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	最小	↗	

$$S(1) = 2\log\left(\frac{e}{1+e}\right) + \log\frac{2(1+e^2)}{e^2} = \log\frac{e^2}{(1+e)^2}\cdot\frac{2(1+e^2)}{e^2} = \log\frac{2(1+e^2)}{(1+e)^2}$$

であるから，$S(a)$ は

$a=1$ のとき，最小値 $\log\dfrac{2(1+e^2)}{(1+e)^2}$ ……(答)

をとる．

◇ ♡

解説

(1) は，$e^x=t$ と置換して積分をしても求められます．この場合は，与えられた不定積分は，

$$\int\frac{1}{1+e^x}\,dx = \int\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

となるため，$\displaystyle\int\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt$ という式変形をしなければいけません．この形にすれば，

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt &= \log|t| - \log|1+t| + C\\ &= \log e^x - \log(1+e^x) + C \quad (\because\ e^x>0,\ 1+e^x>0)\\ &= x - \log(1+e^x) + C\end{aligned}$$

となります．なお，絶対値は絶対値内の式が確実に正であることがわかった時点ではずします．

(2) は，絶対値内の数式の符号によって場合分けが必要になります．すなわち $\dfrac{1}{1+e^x}$ と $\dfrac{1}{1+e^a}$ の大小を比較するので，$0\leqq x\leqq a$ と $a\leqq x\leqq 2$ に分けて考える必要があります．$S(a)$ が求められれば，微分をして最小値を求めるだけなので，計算間違いをしないようにしましょう．