5 （′14　横浜国立大） 【難易度】 … 標準

O を原点とする座標空間に 4 点

$$\mathrm{A}(-2,\ 1,\ 3),\quad \mathrm{B}(s,\ 3,\ -1),\quad \mathrm{C}(1,\ 3,\ 4),\quad \mathrm{D}(t,\ 2t,\ 2t)$$

がある．ただし，s, t は実数で $t \neq 0$ である．A を通り $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に平行な直線と，B を通り $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ に平行な直線が点 P で交わるとする．次の問いに答えよ．

（1） s の値および P の座標を求めよ．

以下では，$\triangle\mathrm{PAB} \backsim \triangle\mathrm{OCD}$ を仮定する．

（2） t の値を求めよ．

（3） D から平面 PAB に下ろした垂線を DH とするとき，H の座標を求めよ．

【テーマ】：空間ベクトルと直線の方程式

方針

(1) は，2 つのベクトル方程式を考えてその交点を求めます．(2) は，相似である条件を利用して t の値を定め，(3) は，4 点が同一平面上にあることと内積を利用して求めます．

♣ ♠

解答

（1） 点 A を通り $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に平行な直線を m とし，直線 m 上の任意の点を X とする．また，点 B を通り $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ に平行な直線を n とし，直線 n 上の任意の点を Y とする．このとき，直線 m, n の方程式は，それぞれ

直線 m ： $\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + k(1,\ 3,\ 4)$ …… Ⓐ

直線 n ： $\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + l(1,\ 2,\ 2)$ …… Ⓑ

となるので，それぞれを成分で表すと次のようになる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = (-2,\ 1,\ 3) + k(1,\ 3,\ 4) = (k-2,\ 3k+1,\ 4k+3)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = (s,\ 3,\ -1) + l(1,\ 2,\ 2) = (l+s,\ 2l+3,\ 2l-1)$$

直線 m, n が交わるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OY}}$ である場合を考えればよいので，

$$\begin{cases} k-2 = l+s \\ 3k+1 = 2l+3 \\ 4k+3 = 2l-1 \end{cases}$$

となり，これを解いて，$k=-6,\ l=-10,\ s=2$ を得る．このとき，X = Y = P であるから，求める点 P の座標と s の値は，

P$(-8,\ -17,\ -21)$，　$s=2$……(答)

（2） (1) より，X = Y = P として，Ⓐ, Ⓑ の式を変形すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -6(1,\ 3,\ 4) = -6\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = 6\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = -10(1,\ 2,\ 2) = \frac{-10}{t}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \frac{10}{t}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

となる．$\triangle\mathrm{PAB} \backsim \triangle\mathrm{OCD}$ であることから，相似比は $6:1$ となるので，

$$6=\frac{10}{t} \iff \boldsymbol{t=\frac{5}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) 点 H は平面 PAB 上の点であり，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \mathbin{/\!/} (1,\,3,\,4)$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}} \mathbin{/\!/} (1,\,2,\,2)$ であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=x(1,\,3,\,4)+y(1,\,2,\,2) \iff \overrightarrow{\mathrm{DH}}-\overrightarrow{\mathrm{DP}}=x(1,\,3,\,4)+y(1,\,2,\,2)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DH}}&=\overrightarrow{\mathrm{DP}}+x(1,\,3,\,4)+y(1,\,2,\,2)\\&=\left(-\frac{29}{3},\,-\frac{61}{3},\,-\frac{73}{3}\right)+x(1,\,3,\,4)+y(1,\,2,\,2)\\&=\left(x+y-\frac{29}{3},\,3x+2y-\frac{61}{3},\,4x+2y-\frac{73}{3}\right)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{DH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0 \iff \overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot(1,\,3,\,4)=0 \iff 26x+15y-168=0 \quad\cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0 \iff \overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot(1,\,2,\,2)=0 \iff 15x+9y-99=0 \quad\cdots\cdots ②$$

①, ② より，これを解いて，$x=3$, $y=6$ を得る．よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}\\&=(-8,\,-17,\,-21)+3(1,\,3,\,4)+6(1,\,2,\,2)\\&=(1,\,4,\,3)\end{aligned}$$

ゆえに，求める点 H の座標は，**H(1, 4, 3)**……(**答**)

◇ ♡

解説

空間内で 2 直線が交わるときを考えるので，ベクトル方程式を利用します．解答にあるように $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ を成分で表して，交点になるときは，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ となることを利用します．(2) 以降は，$\triangle\mathrm{PAB} \backsim \triangle\mathrm{OCD}$ を仮定するとあるので，これを利用します．相似比を利用して t の値を求めればよいことになります．Ⓐ, Ⓑ から $\overrightarrow{\mathrm{PA}}=6\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{10}{t}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ という関係を導き出せれば相似比がわかります．(3) は，典型的な問題です．4 点 H, P, A, B が同一平面上にあるときは，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+u\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ という関係が成り立つので，これと $\overrightarrow{\mathrm{DH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を利用して点 H の座標を求めます．