4 （′10　高知大） **【難易度】** … 標準

xy 平面上の原点を中心として半径 1 の円 C を考える．$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ を P とする．P で C に接し，さらに y 軸と接する円でその中心が円 C の内部にあるものを S とし，その中心 Q の座標を (u, v) とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) u と v をそれぞれ $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を用いて表せ．

(2) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$ としたとき，点 Q の軌跡の式を求めよ．さらに，その軌跡を図示せよ．

(3) 円 S の面積を $D(\theta)$ とするとき，次の値を求めよ．

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{D(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}$$

【テーマ】：関数の極限

方針

(1) は，円 S の半径が u であることに着目して，三角比の定義を用います．(2) は，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ であることを利用します．x, y のとり得る値の範囲にも注意が必要です．(3) は，三角関数に関する極限を考えるので，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が使えるかもしれないという方針を立てて式変形を試みます．

♣ ♠

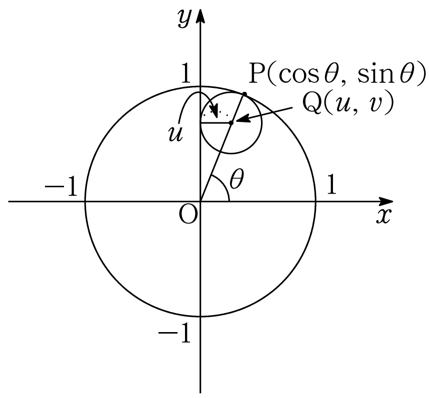
解答

(1) 円 S は，y 軸と接しているので，その中心 Q の x 座標がこの円の半径と一致する．また，P$(\cos\theta, \sin\theta)$ であるから，線分 OP と x 軸の正の方向とのなす角が θ である．

OQ $= 1 - u$ であることから，

$$\cos\theta = \frac{u}{1-u},\quad \sin\theta = \frac{v}{1-u} \cdots\cdots ①$$

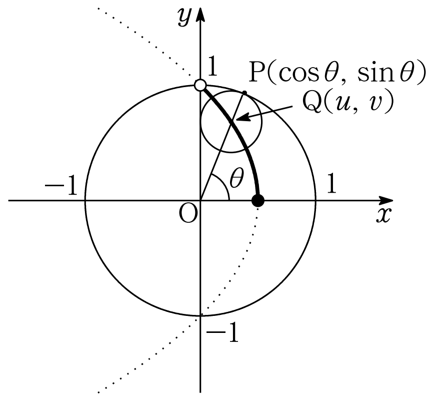
を得る．これより，



$$(1-u)\cos\theta = u \iff (1+\cos\theta)u = \cos\theta$$
$$\iff u = \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$(1-u)\sin\theta = v \iff \left(1 - \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)\sin\theta = v$$
$$\iff v = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{u = \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta},\quad v = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}} \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2) ① より，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ へ代入すると，



$$\left(\frac{v}{1-u}\right)^2 + \left(\frac{u}{1-u}\right)^2 = 1$$
$$v^2 + u^2 = (1-u)^2 \iff v^2 + u^2 = 1 - 2u + u^2$$
$$\therefore\ u = -\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}$$

ゆえに，求める点 Q の軌跡の方程式は，

$$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\ \ (0 \leqq y < 1)} \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

これを図示すると，右図の太実線部分になる．

(3) 円 S の半径は u であるから，$D(\theta)=\pi u^2$ である．したがって，

$$D(\theta)=\pi\frac{\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

である．$\dfrac{\pi}{2}-\theta=x$ とおくと，$\theta\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x\to 0$ であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{D(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}&=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\pi\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left\{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\cdot x^2}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{\pi}{(1+\sin x)^2}\\&=\boldsymbol{\pi}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(1) は，様々な求め方があるので，別解を考えてみてもよいでしょう．この手の計算は苦手とする人が結構いますが，三角比の定義・ベクトルなどを用いれば解決できることが多いです．

(2) は, 点 $\mathrm{Q}(u,\,v)$ の軌跡を求めるため, u と v の関係式を求めることを考えます. (1) で $\cos\theta$, $\sin\theta$ を u, v で表しているので，三角比の相互関係 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入します．この相互関係の式は，常に成り立つ関係式なので問題文に書かれることはほとんどありません．自ら関係式を持ち出してこれるように演習を積んでおく必要があります．

(3) は，三角関数の極限に関する問題です．問題文では，$\theta\to\dfrac{\pi}{2}$ となっているので，$\dfrac{\pi}{2}-\theta=x$ という置き換えを考えます．これは，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いて計算する可能性が高いためです．極限計算の演習は，地味ですがかなり重要ですので，しっかりと演習を積んでおきましょう．