2 （′06　徳島大） 【難易度】 … 標準

実数 θ $(0<\theta<\pi)$ に対して，数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots\cdots+\cos^2 n\theta$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ と定める．

（1）実数 $\alpha,\ \beta$ に対して，$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ が成り立つことを示せ．

（2）$(1+2\cos 2\theta+2\cos 4\theta+\cdots\cdots+2\cos 2n\theta)\sin\theta=\sin(2n+1)\theta$ が成り立つことを示せ．

（3）$a_n-\dfrac{1}{2}(\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots\cdots+\cos 2n\theta)$ を n の式で表せ．ただし，その式は θ を含んではならない．

（4）$a_n-\dfrac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta}$ を n の式で表せ．ただし，その式は θ を含んではならない．

（5）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ．

【テーマ】：無限級数

方針

(1) は，積和の公式を証明するので，加法定理を用います．(2) は，(1) の結果を利用して，「差」の「和」の形を作ります．(3) は，2 倍角の公式と (2) の結果を利用します．(4) は，(2), (3) の結果を利用します．(5) は，(4) の結果を利用しますが，$\dfrac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta}$ の極限をどのように考えるかがポイントとなります．

♣ ♠

解答

（1）**【証明】**

加法定理より，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad\cdots\cdots\quad ①$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad\cdots\cdots\quad ②$$

①＋② より，

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\therefore\quad \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

となり，示された． **（証明終）**

（2）**【証明】**

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\sin\theta+\sum_{k=1}^{n}2\cos 2k\theta\sin\theta\\&=\sin\theta+\sum_{k=1}^{n}\{\sin(2k+1)\theta+\sin(1-2k)\theta\}\quad(\because\ (1))\\&=\sin\theta-\sum_{k=1}^{n}\{\sin(2k-1)\theta-\sin(2k+1)\theta\}\\&=\sin\theta-\{(\sin\theta-\sin 3\theta)+(\sin 3\theta-\sin 5\theta)+(\sin 5\theta-\sin 7\theta)+\cdots\\&\qquad\cdots+(\sin(2n-3)\theta-\sin(2n-1)\theta)+(\sin(2n-1)\theta-\sin(2n+1)\theta)\}\\&=\sin(2n+1)\theta\end{aligned}$$

ゆえに，示された． **（証明終）**

(3) 2 倍角の公式を用いると,

$$a_n = \frac{1+\cos 2\theta}{2} + \frac{1+\cos 4\theta}{2} + \frac{1+\cos 6\theta}{2} + \cdots\cdots + \frac{1+\cos 2n\theta}{2}$$
$$= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cdots\cdots + \cos 2n\theta)$$
$$\therefore\ \ a_n - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cdots\cdots + \cos 2n\theta) = \boldsymbol{\frac{n}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(4) (2) より,

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cdots\cdots + \cos 2n\theta)$$

であるから, (3) の結果を用いて,

$$a_n - \frac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta} = a_n - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cdots\cdots + \cos 2n\theta) - \frac{1}{4}$$
$$= \boldsymbol{\frac{n}{2} - \frac{1}{4}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(5) (4) より,

$$\frac{a_n}{n} = \frac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$$

である. ここで, $0 \leqq \left|\dfrac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta}\right| \leqq \left|\dfrac{1}{4n\sin\theta}\right|$ である。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n\sin\theta} = 0$ となるので, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta}\right| = 0 \text{ すなわち } \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta} = 0$$

である. ゆえに,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1)〜(4) は, 数列と三角関数の融合問題なので, 文系の人でも解答できます. 数学 Ⅲ の要素は (5) だけですから, 数列と三角関数に関する知識がどれだけ備わっているかがポイントとなります.

(1) は, 積和の公式の証明です. 積和の公式は覚えておかなくてもよいので, 導けるようにしておきましょう.

(2) は, 等式の証明問題ですが, (1) を利用することを考えます. 前問の結果がヒントとなることが多々あります. 各小問ごとに考えるのではなく, 前問の結果を含めて考えるような演習を心がけてください. この設問は, (1) の結果を使えば,「差」の「和」の形を作ることができます. 分数式の和を計算するときも部分分数分解を行って,「差」の「和」の形を作りますよね？それと同じ考え方で, 直接和を求めることが難しい場合は,「差」を作ることを考えてみましょう.

(3) は, 2 倍角の公式を用いてと書きましたが, 半角の公式と考えてもらっても構いません.

(4) は, (2), (3) の結果を合わせます. 式の形を良く見てどこが同じものなのかを比較しながら式変形をしてみましょう.

(5) は, 無限級数の問題ですが, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(2n+1)\theta}{4n\sin\theta}$ をどのように求めるかがポイントとなります. $n\to\infty$ にすると, $\sin(2n+1)\theta$ の角度が ∞ に発散するので, はさみうちの原理を用いることを考えます. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ と混同しないように注意しましょう.