44 ('09 横浜国立大) 【難易度】… 標準

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を $a_1=3$, $b_1=8$, $c_1=24$ と関係式

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \\ b_{n+1}=4b_n+c_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \\ c_{n+1}=8c_n \end{cases}$$

で定める．

(1) b_n を n の式で表せ．

(2) $a_{n+3}-a_n$ は 7 で割り切れることを示し，a_n が 7 で割り切れるための n の条件を求めよ．

【テーマ】：連立漸化式

方針

数列 $\{c_n\}$ は等比数列なので，まずは c_n を求めます．そうすると b_n を求めることができます．(2) では，与えられた漸化式を用いて $a_{n+3}-a_n$ を計算してみます．また，a_n が 7 で割り切れる条件は，a_1, a_2, a_3, $\cdots\cdots$ を計算してみて規則性を調べてみましょう．

♣ ♠

解答

(1) 数列 $\{c_n\}$ は初項 24，公比 8 の等比数列であるから，

$$c_n=24\cdot 8^{n-1}=3\cdot 8^n$$

である．したがって，$b_{n+1}=4b_n+3\cdot 8^n$ の両辺を $8^{n+1}\neq 0$ で割ると，

$$\frac{b_{n+1}}{8^{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b_n}{8^n}+\frac{3}{8}$$

である．$d_n=\dfrac{b_n}{8^n}$ とおくと，$d_1=\dfrac{b_1}{8}=1$ であり，

$$d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n+\frac{3}{8} \iff d_{n+1}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\left(d_n-\frac{3}{4}\right)$$

であるから，数列 $\left\{d_n-\dfrac{3}{4}\right\}$ は初項 $d_1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．ゆえに，

$$d_n-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \iff d_n=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

よって，

$$b_n=8^n\left\{\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \iff \boldsymbol{b_n=3\cdot 2^{3n-2}+2^{2n-1}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) **【証明】**

与えられた漸化式から，

$$\begin{aligned} a_{n+3}-a_n &= 2a_{n+2}+b_{n+2}-a_n \\ &= 2(2a_{n+1}+b_{n+1})+(4b_{n+1}+c_{n+1})-a_n \\ &= 4a_{n+1}+6b_{n+1}+c_{n+1}-a_n \\ &= 4(2a_n+b_n)+6(4b_n+c_n)+8c_n-a_n \\ &= 7a_n+28b_n+14c_n \\ &= 7(a_n+4b_n+2c_n) \end{aligned}$$

ここで，a_1, b_1, c_1 は整数であるから，与えられた漸化式より，a_n, b_n, c_n は任意の自然数 n に対して整数であることがわかるので，$a_{n+3}-a_n$ は 7 で割り切れることが示された．　**（証明終）**

次に，数列 $\{a_n\}$ について，

$$a_1=3$$
$$a_2=2a_1+b_1=14=7\cdot 2$$
$$a_3=2\cdot 14+3\cdot 2^4+2^3=2\cdot 14+56=7\cdot 12$$

であるから，a_1 は 7 で割り切れず，a_2, a_3 は 7 で割り切れる．

$a_{n+3}-a_n=7k$（k は自然数）と表されるので，$a_{n+3}=a_n+7k$ であるから，l を自然数として，

$a_1, a_4, a_7, \cdots\cdots, a_{3l-2}$　7 で割り切れない

$a_2, a_5, a_8, \cdots\cdots, a_{3l-1}$　7 で割り切れる

$a_3, a_6, a_9, \cdots\cdots, a_{3l}$　7 で割り切れる

であることがわかる．以上より，a_n が 7 で割り切れるための n の条件は，l を自然数として，

$\boldsymbol{n=3l,\ 3l-1}$……（**答**）

である．

◇ ♡

解説

（1）は，連立漸化式を解く問題ですが，実際には，一つずつ漸化式を解けばよいため，基本的な漸化式の解法が身に付いていれば基本問題です．

（2）は，与えられた漸化式を用いて $a_{n+3}-a_n$ を式変形すれば $7(a_n+4b_n+2c_n)$ という形を得ることができますが，これでいきなり 7 の倍数と言ってはいけません．$a_n+4b_n+2c_n$ が整数であることを述べて初めて 7 の倍数であることがわかるからです．また，これを示すことで数列 $\{a_n\}$ の各項を 7 で割った余りは 3 を周期に変化することに気付きましょう．後半の証明はこれを用います．まずは，a_1, a_2, a_3 を計算して，最初の状態を把握します．あとは，$a_{n+3}=a_n+7k$ という形から，7 で割った余りが周期的に変化することを述べれば n の条件が 3 で割った余りで分類できることがわかるでしょう．