43 （'12　千葉大）　　　　【難易度】 … 標準

xy 平面において，長さ 1 の線分 AB を点 A が原点，点 B が点 $(1,\,0)$ に重なるようにおく．点 A を y 軸に沿って点 $(0,\,1)$ まで移動させ，線分 AB の長さを 1 に保ったまま点 B を x 軸に沿って原点まで移動させる．このとき線分 AB が通る領域を D とする．$0 \leqq x \leqq 1$ となる実数 x に対して，点 $(x,\,y)$ が領域 D に含まれるような y の最大値を $f(x)$ とする．

(1)　$f(x)$ を x の式で表せ．

(2)　領域 D を x 軸を中心に回転させた立体の体積 V を求めよ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

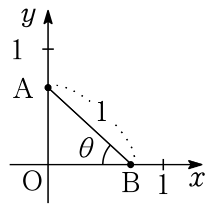
(1) は，直線 AB の方程式を求めるため，$\angle \mathrm{ABO} = \theta$ と置きます．(2) は，(1) が求まれば公式通りに計算できます．

♣ ♠

解答

(1)　$\angle \mathrm{ABO} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．このとき，$\mathrm{A}(0,\,\sin\theta)$, $\mathrm{B}(\cos\theta,\,0)$ より，直線 AB の方程式は，

$$\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = 1 \iff y = -(\tan\theta)x + \sin\theta$$



である．よって，x を $0 < x < 1$ の範囲で固定したときの y の最大値が $f(x)$ である．

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{\cos^2\theta}x + \cos\theta \\ &= \frac{\cos^3\theta - x}{\cos^2\theta} \end{aligned}$$

$0 < x < 1$ であり，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で $\cos^3\theta$ は単調減少であるから，$y' = 0$ のとき，$\cos^3\theta = x$ となる θ がただ 1 つ存在する．この θ を α とすると，

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$\theta = \alpha$ のとき最大値をとる．$\cos^3\alpha = x$ であるから，$\cos\alpha = x^{\frac{1}{3}}$ である．

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

より，

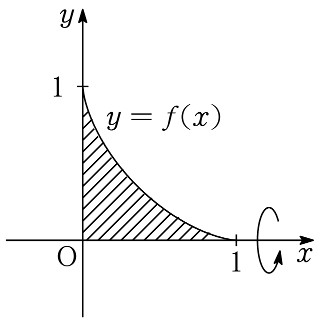
$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}x + \sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}} = -\sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}\,x^{\frac{2}{3}} + \sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

ここで，$f(0)=1$，$f(1)=0$ であるから，

$$\boldsymbol{f(x)=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\quad (0 \leqq x \leqq 1)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから，求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi\{f(x)\}^2\,dx \\ &= \int_0^1 \pi\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx \\ &= \int_0^1 \pi\left(1-3x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{4}{3}}-x^2\right) dx \\ &= \pi\left[\,x-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3\,\right]_0^1 \\ &= \left(1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}\right)\pi \\ &= \boldsymbol{\frac{16}{105}\pi}\cdots\cdots\textbf{(答)} \end{aligned}$$



◇　♡

解説

有名な問題です．$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ で表される図形を**「アステロイド」**といいます．本問で求めた関数 $f(x)$ はこのアステロイドの第 1 象限の部分になります．$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ は x 軸と y 軸に関して対称な図形なので，本問で得られた図形を対称移動すればアステロイドが描けます．一度は自分で関数の導出を経験しておきたい図形です．