42 （'11　島根大） **【難易度】** … やや難

m を自然数とする．$2^m!$ が 2^n で割り切れる自然数 n の最大値を $N(m)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　$N(5)$ を求めよ．

(2)　$N(m)$ を m の式で表せ．

(3)　$N(m)$ が素数ならば，m も素数であることを証明せよ．

【テーマ】：整数問題

方針

記号の意味を正確に把握する必要があります．$2^m!$ を素因数分解したときの素因数 2 の個数を求める問題であることに気付きましょう．

解答

(1)　$N(5)$ は，$2^5! = 32!$ が 2^n で割り切れる自然数 n の最大値を表すので，$32!$ を素因数分解したときの素因数 2 の個数が $N(5)$ である．1 から 32 までの自然数において，

2^1 の個数は，　16 個

2^2 の個数は，　8 個

2^3 の個数は，　4 個

2^4 の個数は，　2 個

2^5 の個数は，　1 個

であるから，素因数 2 の個数は，

$$N(5) = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = \mathbf{31}\ \textbf{(個)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2)　(1) と同様に考えると，$N(m)$ は $2^m!$ を素因数分解したときの素因数 2 の個数と一致する．

2^1 の個数は，　2^{m-1} 個

2^2 の個数は，　2^{m-2} 個

2^3 の個数は，　2^{m-3} 個

⋮　　　⋮

2^{m-1} の個数は，　2^1 個

2^m の個数は，　2^0 個

であるから，素因数 2 の個数は，

$$\begin{aligned} N(m) &= 2^{m-1} + 2^{m-2} + 2^{m-3} + \cdots\cdots + 2^1 + 2^0 \\ &= \frac{2^m - 1}{2 - 1} \\ &= \mathbf{2^m - 1}\cdots\cdots\textbf{(答)} \end{aligned}$$

(3) **【証明】**

$m=1$ のときは，$N(1)=1$ となるので不適であるから，$m \geqq 2$ で考える．m が素数でないとき，2 以上の整数 $p,\,q$ を用いて，$m=pq$ と表すことができる．(2) の結果から，

$$\begin{aligned} N(m) &= 2^m-1 \\ &= 2^{pq}-1 \\ &= (2^p)^q-1 \\ &= (2^p-1)(2^{p(q-1)}+2^{p(q-2)}+\cdots\cdots+2^p+1) \end{aligned}$$

と因数分解することができる．$p \geqq 2$ であるから，$2^p-1 \geqq 3$ であり，$2^{p(q-1)}+2^{p(q-2)}+\cdots\cdots+2^p+1$ は q 個の自然数の和であるから 2 以上である．したがって，

命題：「m が素数でないならば $N(m)$ は素数でない」

が成り立つので，その対偶である

命題：「$N(m)$ が素数ならば m は素数である」

が成り立つ．以上より，題意は示された． **（証明終）**

◇ ♡

解説

類題の経験がないとやや難しいと感じる問題です．ただし，類題を解いたことがある人にとっては易しいと感じるでしょう．経験が得点差に現れる問題です．(1) は (2) を求めるためのヒントになっているので，(1) で記号の意味を把握し，何を求めればよいのかを理解する必要があります．(2) では，それを一般化する力が問われています．解答では，素因数 2 の個数を $2^1,\,2^2,\,2^3,\,2^4,\,\cdots$ の倍数の個数を足していますが，これは次のように考えています．

2^m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\cdots$
2^1		●		●		●		●		●		●		●		●	
2^2				●				●				●				●	
2^3								●								●	
2^4																●	
$\vdots$																	

上の表の●は，横に並べた自然数を素因数分解したときの素因数 2 の個数と一致しています．つまり，2^m の素因数 2 の個数はこの●の個数と一致することになります．そこで，縦に並べた $2^1,\,2^2,\,2^3,\,\cdots$ の倍数で●の個数を計算して●の個数を求めようという考え方です．

(3) は，素数の性質を理解しておく必要があります．自然数は

1，素数，合成数

の 3 つに分類することができます．合成数とは，2 以上の整数 $p,\,q$ を用いて pq と表すことができる自然数です．要するに 1 と素数以外の自然数はすべて合成数になります．素数の実態を把握することは困難ですからこの合成数を用いて証明を進めていきます．解答では与えられた命題の対偶をとって証明をしています．この証明方法を**「対偶証明法」**といいます．