41 （'11　神戸大） 【難易度】 … 標準

n を 2 以上の自然数として，

$$S_n = \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k\log k}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_n^{n^3} \frac{dx}{x\log x}$ を求めよ．

(2) k を 2 以上の自然数とするとき，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x\log x} < \frac{1}{k\log k}$$

を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ．

【テーマ】：定積分と不等式

方針

(1) は，$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ の形になっていることに気付く必要があります．(2) は，関数の単調性を利用したり面積の大小関係を用いることで証明できます．(3) は，(2) で示した不等式を用いて，はさみうちの原理で求めます．

♣ ♠

解答

(1)
$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_n^{n^3} \frac{(\log x)'}{\log x}\,dx \\
&= \Big[\log|\log x|\Big]_n^{n^3} \\
&= \log(\log n^3) - \log(\log n) \\
&= \log\frac{3\log n}{\log n} \\
&= \mathbf{\log 3}\cdots\cdots\text{(答)}
\end{aligned}$$

(2) **【証明】**

$f(x) = x\log x$ とおくと，$f'(x) = \log x + 1$ であるから，$x \geqq 2$ で $f'(x) > 0$ である．したがって，$x \geqq 2$ において $f(x)$ は単調増加である．すなわち $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ とおくと，$x \geqq 2$ で $g(x)$ は単調減少であるから，$k \geqq 2$ において，$k < x < k+2$ となる x に対し，

$$g(k+1) < g(x) < g(k) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \frac{1}{x\log x} < \frac{1}{k\log k}$$

である．よって，

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)\log(k+1)}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x\log x}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k\log k}\,dx$$

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x\log x}\,dx < \frac{1}{k\log k}$$

が成り立つので，示された． **(証明終)**

(3) (2) で示した不等式において，$k=n,\ n+1,\ n+2,\ \cdots\cdots,\ n^3-1$ として辺々加えると，

$$\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}<\sum_{k=n}^{n^3-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x\log x}\,dx<\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}\ \cdots\cdots ①$$

ここで，

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}&=\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}+\frac{1}{(n+2)\log(n+2)}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3\log n^3}\\&=\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}-\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{n^3\log n^3}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=n}^{n^3-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x\log x}\,dx=\int_n^{n^3}\frac{1}{x\log x}\,dx=\log 3\quad(\because\ (1))$$

よって，① より，

$$\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}-\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{n^3\log n^3}<\log 3<\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}$$

$$\log 3<\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}<\log 3+\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n^3\log n^3}$$

$$\log 3<S_n<\log 3+\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n^3\log n^3}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\log 3+\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n^3\log n^3}\right)=0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\mathbf{\log 3}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は，$t=\log x$ とおいて置換積分法を用いても求められますが，$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|+C$ (C は積分定数) を用いて計算できるようにしておく方が時間短縮や計算ミス軽減などの面から考えるとよいでしょう．(2), (3) は頻出のタイプなので確実に得点できるようにしておく必要があります．特に (2) の不等式の示し方は様々なタイプがあります．ここでは単調性を利用して示しましたが，面積の大小関係などを用いる方法もよく利用されます．(3) の極限計算ですが，和の計算部分を少々適当にしても答えはあうでしょうが，記述のテストなのできちんとした処理が求められています．とくに，和の一般項部分を変換する式変形

$$\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}=\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}-\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{n^3\log n^3}$$

は理解して，できるようにしておきたいところです．