40 （'02　鳥取大） 【難易度】 … やや難

$a_1 = 1,\ a_2 = 6$ ならびに $2(2n+3)a_{n+1} = (n+1)a_{n+2} + 4(n+2)a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

（1） $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ とおくとき，b_n を n の式で表せ．

（2） a_n を n の式で表せ．

（3） 初項から第 n 項までの和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を求めよ．

【テーマ】：隣接３項間漸化式

方針

$b_n = a_{n+1} - 2a_n$ とおくので，数列 $\{b_n\}$ に関する漸化式を導きます．(2) では，(1) で導いた漸化式を解きます．(3) は (等差数列)×(等比数列) の和を求める計算方法を考えますが，2 回やらないと答えが得られません．

♣ ♠

解答

（1） $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ とおくとき，$b_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1}$ であるから，これを与式へ代入して，

$$\begin{aligned} 2(2n+3)a_{n+1} &= (n+1)(b_{n+1} + 2a_{n+1}) + 4(n+2)a_n \\ &= (n+1)b_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + 4(n+2)a_n \\ (n+1)b_{n+1} &= 2(n+2)a_{n+1} - 4(n+2)a_n \\ &= 2(n+2)(a_{n+1} - 2a_n) \\ &= 2(n+2)b_n \end{aligned}$$

両辺を $(n+2)(n+1) \fallingdotseq 0$ で割ると，

$$\frac{b_{n+1}}{n+2} = 2 \cdot \frac{b_n}{n+1}$$

であるから，$c_n = \dfrac{b_n}{n+1}$ とおくと，

$$c_1 = \frac{b_1}{2} = \frac{a_2 - 2a_1}{2} = 2,\quad c_{n+1} = 2c_n$$

となるので，数列 $\{c_n\}$ は，初項 2，公比 2 の等比数列である．したがって，

$$c_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

より，$\boldsymbol{b_n = (n+1)2^n}$**……(答)**

（2） (1) より，$a_{n+1} - 2a_n = (n+1)2^n$ であるから，両辺を $2^{n+1} \fallingdotseq 0$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{n+1}{2}$$

$d_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，

$$d_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2},\quad d_{n+1} - d_n = \frac{n+1}{2}$$

より，数列 $\{d_n\}$ の階差数列の一般項は $\dfrac{n+1}{2}$ である．ゆえに，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} d_n &= d_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}n(n-1) + \frac{1}{2}(n-1) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1) \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つので，$d_n = \dfrac{1}{4}n(n+1)$ である．ゆえに，

$$a_n = \frac{1}{4}n(n+1)2^n \iff \boldsymbol{a_n = n(n+1)2^{n-2}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3) (2) より，

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n \\ -) & 2S_n = & \quad 2a_1 + 2a_2 + \cdots\cdots + 2a_{n-1} + 2a_n \\ \hline & -S_n = & a_1 + b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_{n-1} - 2a_n \end{array}$$

$b_n = a_{n+1} - 2a_n$ より，$-2a_n = b_n - a_{n+1}$ であるから，

$$S_n = -a_1 - (b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_{n-1} + b_n) + a_{n+1} \cdots\cdots ①$$

ここで，$T_n = b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n$ とおくと，$b_n = (n+1)2^n$ であるから，

$$\begin{array}{rrl} & T_n = & 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \cdots\cdots + (n+1)2^n \\ -) & 2T_n = & \quad 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots\cdots + n\cdot 2^n + (n+1)2^{n+1} \\ \hline & -T_n = & 2\cdot 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots\cdots + 2^n - (n+1)2^{n+1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} T_n &= -2 - (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots\cdots + 2^n) + (n+1)2^{n+1} \\ &= -2 - \frac{2(2^n - 1)}{2-1} + (n+1)2^{n+1} \\ &= n\cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

ゆえに，① へ代入して，

$$\begin{aligned} S_n &= -1 - n\cdot 2^{n+1} + (n+1)(n+2)2^{n-1} \\ &= \{-4n + (n^2 + 3n + 2)\}2^{n-1} - 1 \\ &= \boldsymbol{(n^2 - n + 2)\cdot 2^{n-1} - 1}\cdots\cdots\textbf{(答)} \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

漸化式の様々な知識が盛り込まれた問題なので，中途半端な知識では完答は難しいでしょう．一つ一つの計算は基本的なものですがそれが融合されることで解きにくいと感じる問題です．漸化式や和の計算の総復習にはちょうどよい演習問題です．

(1) は，与えられた隣接 3 項間漸化式を置き換えにより隣接 2 項間漸化式にするという問題です．数列 $\{b_n\}$ の漸化式を導きたいので，まず b_{n+1} を考えてみます．$(n+1)b_{n+1} = 2(n+2)b_n$ という形の漸化式を見たことがない人には難しいでしょうから，経験を積んで様々な漸化式にあたっておく必要があります．(2) では，(1) で求めた b_n を用いて a_n を求めます．ここでは階差数列に関する漸化式の知識が必要です．(3) は (等差数列)×(等比数列) の和の計算方法で求めますが，a_n の多項式部分が 2 次式であるため 2 回計算を実行しなければ和が求められません．
(1) の b_n を用いると解答がすっきりとまとめられるでしょう．

