39 （’03 岡山大） 【難易度】 … 標準

$1 < a < b$ とする．原点 O と点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ を通る直線，原点 O と点 $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ を通る直線，および曲線 $y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ で囲まれた部分を R とする．R の面積を E，R を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．

（1） E を a と b の式で表せ．

（2） $c > 1$ とし，曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ から直線 $y = -x$ に下ろした垂線を PQ とする．線分 OQ の長さを s，線分 PQ の長さを t とすると，$t^2 = s^2 + 2$ となることを示せ．

（3） V を a と b の式で表せ．

（4） $b = a + 1$ のとき $\displaystyle\lim_{a\to\infty} E$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} V$ を求めよ．

【テーマ】：斜軸回転体の体積

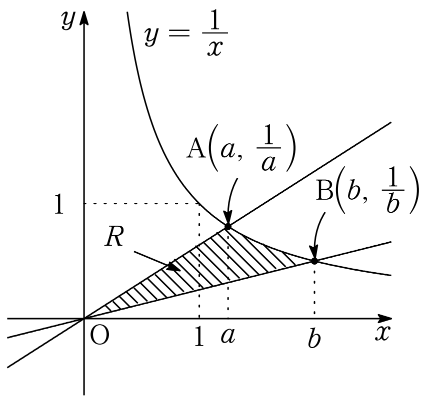
方針

（1）は，三角形の面積を利用します．（2）は，点と直線の距離を利用します．（3）は，（1）の面積計算と同様な考え方で円錐の体積を利用して求めます．

♣ ♠

解答

（1） $\mathrm{C}(a,\ 0)$, $\mathrm{D}(b,\ 0)$ とすると，右図より，



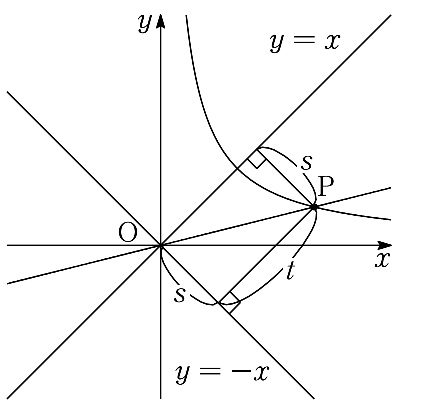
$$
\begin{aligned}
E &= \int_a^b \frac{1}{x}\,dx + \triangle\mathrm{OAC} - \triangle\mathrm{OBD} \\
&= \Big[\log|x|\Big]_a^b + \frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{a} - \frac{1}{2}b\cdot\frac{1}{b} \\
&= \log b - \log a = \boldsymbol{\log\frac{b}{a}} \cdots\cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$

（2） **【証明】**

題意より，s は点 $\mathrm{P}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ と直線 $y = x$ との距離に等しいので，

$$
s = \frac{\left|c - \frac{1}{c}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|c - \frac{1}{c}\right|
$$

また，t は点 $\mathrm{P}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ と直線 $y = -x$ との距離に等しいので，



$$
t = \frac{\left|c + \frac{1}{c}\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|c + \frac{1}{c}\right|
$$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
t^2 - s^2 &= \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(c - \frac{1}{c}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(c^2 + 2 + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{1}{2}\left(c^2 - 2 + \frac{1}{c^2}\right) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

であり，$t^2 = s^2 + 2$ が示された． **（証明終）**

(3) $c=a$ のときの s の値を α, $c=b$ のときの s の値を β とすると,

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a-\frac{1}{a}\right),\quad \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b-\frac{1}{b}\right)$$

である．このとき,

$$\begin{aligned}
V &= \underbrace{\int_\alpha^\beta \pi t^2\,ds}_{\substack{\text{曲線 AB を } y=-x \text{ のまわりに}\\ \text{回転させてできる回転体の体積}}} + \underbrace{\frac{1}{3}\pi(\alpha^2+2)\alpha}_{\substack{\text{線分 OA を } y=-x \text{ のまわりに}\\ \text{回転させてできる回転体（円錐）の体積}}} - \underbrace{\frac{1}{3}\pi(\beta^2+2)\beta}_{\substack{\text{線分 OB を } y=-x \text{ のまわりに}\\ \text{回転させてできる回転体（円錐）の体積}}}\\
&=\int_\alpha^\beta \pi(s^2+2)\,ds+\frac{\pi}{3}\{\alpha^3-\beta^3+2(\alpha-\beta)\}\\
&=\pi\left[\frac{1}{3}s^3+2s\right]_\alpha^\beta+\frac{\pi}{3}\{\alpha^3-\beta^3+2(\alpha-\beta)\}\\
&=\frac{\pi}{3}(\beta^3-\alpha^3)+2\pi(\beta-\alpha)-\frac{\pi}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{2\pi}{3}(\beta-\alpha)\\
&=\frac{4\pi}{3}(\beta-\alpha)\\
&=\frac{4\pi}{3}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b-\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right\}\\
&=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(b-a-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$

(4) $b=a+1$ のとき, $E=\log\dfrac{a+1}{a}$ であるから,

$$\lim_{a\to\infty}E=\lim_{a\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{a}\right)=\log 1=\mathbf{0}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

また,

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a-\frac{1}{a}\right),\quad \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b-\frac{1}{b}\right)$$

である．このとき,

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty}V&=\lim_{a\to\infty}\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(a+1-a-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a}\right)\\
&=\lim_{a\to\infty}\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

面積の計算は，三角形を利用して，全体から不要な部分を取り除くという手法で計算します．(2) は (3) で体積を計算するためのヒントです．$y=-x$ が回転軸なので，原点からの距離を変数として積分しなければいけません．もちろん t が半径になります．(3) の体積計算は，(1) の面積計算と同様に円錐を利用して，全体から不要な部分を取り除いて求めます．