38 ('08 福井大) 【難易度】 … 標準

2 つの整式 $f(x) = x^2 + bx + c$ と $g(x) = x^2 + x + 1$ について，$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの余りと $f(x^2)$ を $g(x)$ で割ったときの余りが一致し，さらに $f(x^3)$ は $g(x)$ で割り切れるとする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，b, c は実数の定数とする．

(1) α が 2 次方程式 $g(x) = 0$ の解のとき，α^3 の値を求めよ．

(2) b, c の値を求めよ．

(3) $g(x^3)$ を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ．

【テーマ】：対称式の計算

方針

(1) は，$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ という因数分解の公式を利用します．(2) は，題意に与えられている条件から 2 つの式を作ります．(3) は，$f(x)$ が因数分解できることを用いて解きます．

♣ ♠

解答

(1) 題意より，$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ を満たし，

$$\alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$$

であるから，$\alpha^3 - 1 = 0$ を得る．ゆえに，$\alpha^3 = \mathbf{1}$……(**答**)

(2) $f(x) = (x^2 + x + 1) + (b-1)x + c - 1$ と表せるので，$f(x)$ を $g(x)$ で割った余りは $(b-1)x + c - 1$ である．また，

$$f(x^2) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + b) + (1-b)x + c - b$$

より，$f(x^2)$ を $g(x)$ で割った余りは，$(1-b)x + c - b$ となる．ゆえに，

$$(b-1)x + c - 1 = (1-b)x + c - b$$

がすべての x で成り立つための条件は，

$$\begin{cases} b - 1 = 1 - b \\ c - 1 = c - b \end{cases}$$

これを解いて $b = 1$，c は任意となる．さらに，$f(x^3)$ は $g(x)$ で割り切れるので，$f(\alpha^3) = 0$ となる．

したがって，

$$f(\alpha^3) = \alpha^6 + b\alpha^3 + c = 0 \iff 1 + b + c = 0$$

$b = 1$ より $c = -2$ を得る．ゆえに，求める b, c の値は，

$$\boldsymbol{b = 1, c = -2}$$……(**答**)

(3) (2) より，$f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ である．

よって，$g(x^3)$ を $f(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $px + q$ とすると，

$$g(x^3) = (x+2)(x-1)Q(x) + px + q$$

この式に，$x = -2, 1$ を代入すると，

$$\begin{cases} g((-2)^3) = -2p + q \\ g(1^3) = p + q \end{cases} \iff \begin{cases} -2p + q = 57 \\ p + q = 3 \end{cases}$$

これを解いて，$p=-18,\ q=21$ を得るので，求める余りは，

$$\boldsymbol{-18x+21}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

整式に関する問題は不慣れな人が多いかもしれませんが，商や余りを設定して式を作ることが基本です．特に，割る式が 1 次式のときには剰余の定理が使えるので，剰余の定理もあわせて復習をしておきましょう．また，整式 $A(x)$ を整式 $B(x)$ で割ったときの商が $Q(x)$ で，余りが $R(x)$ であるとき，

$$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$$

が成り立つことも重要です．

【因数定理】

整式 $P(x)$ について，$P(a)=0$ のとき，$P(x)$ は $x-a$ を因数にもつ．

【剰余の定理】

整式 $P(x)$ を $ax+b$ $(a \fallingdotseq 0)$ で割ったときの余りは，$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ である．