37 （'10　北海道大）　**【難易度】** … 標準

a を正の実数とし，2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$$

を考える．

（1） C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ．

（2） 2 つの放物線 C_1, C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ．

【テーマ】：共通接線

方針

C_1 の接線と C_2 の接線が一致すると考えます．

♣ ♠

解答

（1） C_1 について，$y' = 2x$ より C_1 上の点 (s, s^2) における接線の方程式は，

$$y = 2s(x - s) + s^2 \iff y = 2sx - s^2 \cdots\cdots ①$$

C_2 について，$y' = 2x - 4a$ より C_2 上の点 $(t, t^2 - 4at + 4a)$ における接線の方程式は，

$$y = (2t - 4a)(x - t) + t^2 - 4at + 4a \iff y = (2t - 4a)x - t^2 + 4a \cdots\cdots ②$$

である．① と ② が任意の x に対して一致すればよいので，

$$\begin{cases} 2s = 2t - 4a & \cdots\cdots ③ \\ -s^2 = -t^2 + 4a & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

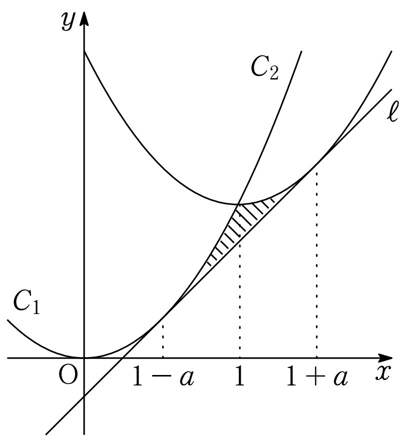
を得る．③ より，$s = t - 2a$ であるから，④ へ代入して，

$$-(t - 2a)^2 = -t^2 + 4a \iff t = a + 1$$

このとき，$s = -a + 1$ である．よって，② から求める共通接線の方程式は，

$$y = (-2a + 2)x - (a + 1)^2 + 4a \iff \boldsymbol{y = (-2a + 2)x - (a - 1)^2} \cdots\cdots\text{(答)}$$

（2） （1）より，グラフは右図のようになるので，求める面積は図の斜線部分である．求める面積を S とすると，



$$\begin{aligned} S &= \int_{1-a}^{1} \{x^2 + 2(a-1)x + (a-1)^2\}\,dx \\ &\quad + \int_{1}^{1+a} \{x^2 - 4ax + 4a - (-2a + 2)x + (a-1)^2\}\,dx \\ &= \int_{1-a}^{1} (x + a - 1)^2\,dx + \int_{1}^{1+a} \{x - (1 + a)\}^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x + a - 1)^3\right]_{1-a}^{1} + \left[\frac{1}{3}(x - 1 - a)^3\right]_{1}^{1+a} \\ &= \frac{1}{3}a^3 - 0 + 0 - \frac{1}{3}(-a)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}a^3} \cdots\cdots\text{(答)} \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

共通接線の問題は，2 つのタイプがあります．1 つは，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=t$ で接しているというものです．この場合，$x=t$ における微分係数が等しくかつこの点を共有しているため

$$\begin{cases} f'(t)=g'(t) \\ f(t)=g(t) \end{cases}$$

を満たせば十分です．もう 1 つは，本問のように 2 つの曲線は接していませんが，1 本の接線が 2 つの曲線と異なる接点で接するというものです．この場合，本問の解答にあるように，互いの接線が一致するという条件から連立方程式を作って解きます．

(2) は，放物線と接線で囲まれる部分の面積ですから，

$$\int (x+a)^2\,dx=\frac{1}{3}(x+a)^3+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

という式を用いて計算すると楽に計算できます．接線なので必ず $(x+a)^2$ という形が作れるということを理解しておかなければいけません．