35 （'13　和歌山大） **【難易度】** … 標準

次の問いに答えよ．

（1）　次の式が成り立つことを示せ．

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

（2）　自然数 n に対して，

$$2\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta\sin\theta=\sin(2n+1)\theta-\sin\theta$$

が成り立つことを示せ．

（3）　自然数 n に対して，

$$\tan\frac{\pi}{4n}=\frac{1}{1+2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}}$$

が成り立つことを示せ．

【テーマ】：加法定理の応用

方針

(1) は和積の公式を証明するため，加法定理を用います．(2) は (1) を，(3) は (2) を利用することを考えます．

解答

（1）　**【証明】**

加法定理より，

$$\begin{array}{rr} & \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ -) & \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \hline & \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta \end{array}$$

よって，示された． **（証明終）**

（2）　(1) において，$\alpha=2k\theta$，$\beta=\theta$ とおくと，

$$\sin(2k+1)\theta-\sin(2k-1)\theta=2\cos 2k\theta\sin\theta$$

となるので，$k=1, 2, \cdots\cdots, n$ として辺々加えると，

$$\begin{array}{rr} & \sin 3\theta-\sin\theta=2\cos 2\cdot 1\cdot\theta\sin\theta \\ & \sin 5\theta-\sin 3\theta=2\cos 2\cdot 2\cdot\theta\sin\theta \\ & \sin 7\theta-\sin 5\theta=2\cos 2\cdot 3\cdot\theta\sin\theta \\ & \vdots \quad = \quad \vdots \\ +) & \sin(2n+1)\theta-\sin(2n-1)\theta=2\cos 2\cdot n\cdot\theta\sin\theta \\ \hline & \sin(2n+1)\theta-\sin\theta=2\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta\sin\theta \end{array}$$

よって，示された． **（証明終）**

(3) (2) で示した等式において，$\theta = \dfrac{\pi}{4n}$ とすると，

$$\begin{aligned}2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n} &= \sin\frac{(2n+1)\pi}{4n} - \sin\frac{\pi}{4n}\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right) - \sin\frac{\pi}{4n}\\ &= \cos\frac{\pi}{4n} - \sin\frac{\pi}{4n}\end{aligned}$$

となる．両辺を $\sin\dfrac{\pi}{4n} \fallingdotseq 0$ で割ると，

$$2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n} = \frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} - 1 \iff 2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}} - 1$$

したがって，

$$\tan\frac{\pi}{4n} = \frac{1}{1+2\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}}$$

となり，示された． **(証明終)**

◇ ♡

解説

(1) は，加法定理を用いれば容易に示せる問題なので，完答できるようにしておかなければいけない問題です．和積の公式は暗記するよりもこのようにして求められるようになっておく方が応用が効いてよいでしょう．

(2) は，(1) において，α, β を適当に決める必要がありますが，ポイントは $\sum$ の部分で，$\cos 2k\theta \sin\theta$ となっているところに着目すれば，$\alpha = 2k\theta,\ \beta = \theta$ という置換に気付けます．

(3) は，(2) の式を用いますが，今度は θ に何を代入すればよいかを考えます．ポイントは，(2) と同様 $\sum$ の部分で $\cos\dfrac{k\pi}{2n}$ となっているところに着目すれば，$2k\theta = \dfrac{k\pi}{2n}$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{4n}$ となります．証明すべき式から逆算して方針を立てることは証明問題では非常に大切な考え方です．