33 （'76　大阪市立大） **【難易度】** … 標準

点 O を中心とする半径 1 の円周上に 3 点 A, B, C がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，零ベクトルを $\vec{0}$ と書くとき，$\vec{a}+2\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$ という関係がある．ただし，$1<t<3$ とする．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を t を用いて表せ．

(2)　$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，三角形 ABC の面積を求めよ．

【テーマ】：内積の計算

方針

与えられた等式を変形して両辺の大きさの 2 乗を計算すると内積が得られます．

♣　♠

解答

(1)　$\vec{a}+2\vec{b}=-t\vec{c}$ より，両辺の大きさの 2 乗を計算すると，

$$\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2=t^2\left|\vec{c}\right|^2$$

$$1+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=t^2\quad\left(\because\ \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1\right)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{t^2-5}{4}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

$2\vec{b}+t\vec{c}=-\vec{a}$ より，両辺の大きさの 2 乗を計算すると，

$$4\left|\vec{b}\right|^2+4t\vec{b}\cdot\vec{c}+t^2\left|\vec{c}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2$$

$$4+4t\vec{b}\cdot\vec{c}+t^2=1$$

$t\neq 0$ より，

$$\boldsymbol{\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{-t^2-3}{4t}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

$\vec{a}+t\vec{c}=-2\vec{b}$ より，両辺の大きさの 2 乗を計算すると，

$$\left|\vec{a}\right|^2+2t\vec{c}\cdot\vec{a}+t^2\left|\vec{c}\right|^2=4\left|\vec{b}\right|^2$$

$$1+2t\vec{c}\cdot\vec{a}+t^2=4$$

$t\neq 0$ より，

$$\boldsymbol{\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{-t^2+3}{2t}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{4}$ より，$\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}$ である．よって，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ であるから，(1) より，

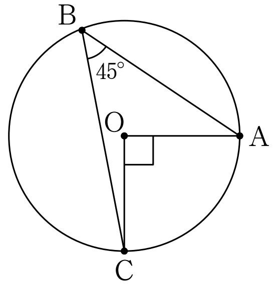
$$t=\pm\sqrt{3}$$

$1<t<3$ より，$t=\sqrt{3}$ である．したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2$$

$$=1-2\cdot\frac{-2}{4}+1=3$$



$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|>0$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{3}$ である．

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\left|\vec{b}\right|^2=1-2\cdot\frac{-6}{4\sqrt{3}}+1=2+\sqrt{3}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|>0$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ である．

ゆえに，求める三角形 ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は，与えられた条件式から内積を求める基本問題です．どれか 1 つの項を右辺に移項して大きさの 2 乗を計算すれば内積が得られるので完答しましょう．

(2) は，三角形の面積を求めるので，どの公式を利用するかがポイントとなります．$\angle$ABC の大きさがわかっているので，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\sin\angle\mathrm{ABC}$ を用いて計算をしています．