32 （'75　一橋大） **【難易度】** … 標準

$z+\dfrac{4}{z}$ が実数であり，かつ $|z-2|=2$ であるような複素数 z を求めよ．

【テーマ】：複素数の基本計算

方針

求める複素数を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおいて，r, θ を求める方法と，複素数 $z+\dfrac{4}{z}$ が実数であるという条件を用いて等式を作り直接 z を求める方法があります．

♣ ♠

解答

求める複素数 z を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\frac{4}{z} &= \frac{4}{r}\cdot\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\\
&= \frac{4}{r}\cdot\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}\\
&= \frac{4}{r}\cdot\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta-i^2\sin^2\theta}\\
&= \frac{4}{r}\cdot\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\quad(\because\ i^2=-1)\\
&= \frac{4}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)
\end{aligned}$$

である．したがって，

$$z+\frac{4}{z}=\left(r\cos\theta+\frac{4}{r}\cos\theta\right)+i\left(r\sin\theta-\frac{4}{r}\sin\theta\right)$$

となる．これが実数であることから，

$$r\sin\theta-\frac{4}{r}\sin\theta=0\quad\Longleftrightarrow\quad\sin\theta\left(r-\frac{4}{r}\right)=0$$

すなわち，$\sin\theta=0$ または $r=\dfrac{4}{r}$ であるから，$r>0, 0\leqq\theta<2\pi$ より，$\theta=0, \pi$ または $r=2$ である．

(i) $\theta=0$ のとき，

$z=r$ より，$|z-2|=2\quad\Longleftrightarrow\quad|r-2|=2\quad\Longleftrightarrow\quad r-2=\pm2$

$r>0$ より，$r=4$

(ii) $\theta=\pi$ のとき，

$z=-r$ より，$|z-2|=2\quad\Longleftrightarrow\quad|-r-2|=2\quad\Longleftrightarrow\quad r+2=\pm2$

$r>0$ より，不適．

(iii) $r=2$ のとき，

$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ より，

$$\begin{aligned}
|z-2|=2 &\Longleftrightarrow |2(\cos\theta+i\sin\theta)-2|=2\\
&\Longleftrightarrow |\cos\theta+i\sin\theta-1|=1\\
&\Longleftrightarrow |(\cos\theta-1)+i\sin\theta|^2=1\\
&\Longleftrightarrow (\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta=1
\end{aligned}$$

$$\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta = 1 \iff \cos\theta = \frac{1}{2}$$

このとき，$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$z = 2\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 \pm \sqrt{3}i$

以上より，求める複素数 z は，

$$\boldsymbol{z = 4,\ 1 \pm \sqrt{3}i}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である．

別解

$z + \frac{4}{z}$ は実数であるから，

$$z + \frac{4}{z} = \overline{z + \frac{4}{z}} = \overline{z} + \frac{4}{\overline{z}}$$

が成り立つので，これを変形すると，

$$z \cdot z\overline{z} + 4\overline{z} = \overline{z} \cdot z\overline{z} + 4z$$

$$z \cdot |z|^2 + 4\overline{z} = \overline{z} \cdot |z|^2 + 4z \iff |z|^2(z - \overline{z}) - 4(z - \overline{z}) = 0 \iff \left(|z|^2 - 4\right)(z - \overline{z}) = 0$$

ゆえに，$|z|^2 = 4$ または $z = \overline{z}$ である．

(i) $|z|^2 = 4$ のときは，$|z| > 0$ なので $|z| = 2$ である．ここで，$|z - 2| = 2$ であるから，両辺を 2 乗して $|z - 2|^2 = 4$ を得るので，

$$(z-2)(\overline{z-2}) = 4 \iff (z-2)(\overline{z}-2) = 4 \iff z\overline{z} - 2(z + \overline{z}) = 0$$

であり，$z\overline{z} = |z|^2 = 4$ であるから，

$$z + \overline{z} = 2 \text{ かつ } z\overline{z} = 4$$

を得る．ゆえに，$z, \overline{z}$ を 2 解にもつ 2 次方程式は，

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

であり，その解は $x = 1 \pm \sqrt{3}i$ であるから，

$$z = 1 \pm \sqrt{3}i$$

である．

(ii) $z = \overline{z}$ のときは，z は実数であるから，$|z - 2| = 2$ より，

$$z - 2 = \pm 2 \iff z = 0,\ 4$$

を得るが，$z \neq 0$ であるから，$z = 4$ である．

以上より，求める複素数 z は，

$$\boldsymbol{z = 4,\ 1 \pm \sqrt{3}i}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である．

◇ ♡

解説

様々な方針が考えられる問題です．もちろん $z = a + bi$ とおいて，$z + \frac{4}{z}$ を計算し，それが実数となるための a, b の条件を求めるという方針でも解くことができます．様々な解法を知ることで応用力が身につき多くの問題に対応できるようになるので，別解の研究にも力を入れるとよいでしょう．

