31 （'03　大阪市立大） 【難易度】 … 標準

複素数平面において，点 $P(z)$ を原点 O のまわりに θ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ だけ回転し，さらに点 $E(1)$ のまわりに θ だけ回転した点を $Q(w)$ とする．このとき，点 $Q(w)$ は点 $P(z)$ をある点 $A(\alpha)$ のまわりに 2θ だけ回転した点と一致する．ただし，回転はすべて反時計まわりとする．複素数 γ を

$$\gamma = \cos\theta + i\sin\theta$$

とする．

(1) 複素数 w を z と γ を用いて表せ．

(2) 複素数 α を γ を用いて表せ．

(3) 三角形 OEA が正三角形となるような θ の値を求めよ．

【テーマ】：複素数の図形への応用

方針

複素数 z を原点のまわりに θ 回転させる場合は $\cos\theta + i\sin\theta$ をかければよいので，点 1 のまわりに θ 回転させる場合は $z-1$ に $\cos\theta + i\sin\theta$ をかけて再び実軸方向に 1 平行移動させれば求められます．

♣ ♠

解答

(1) 点 $P(z)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転すると，

$$z(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される．さらに，点 $E(1)$ のまわりに θ だけ回転した点を $Q(w)$ とするので，

$$\begin{aligned} w &= \{z(\cos\theta + i\sin\theta) - 1\}(\cos\theta + i\sin\theta) + 1 \\ &= z(\cos\theta + i\sin\theta)^2 - (\cos\theta + i\sin\theta) + 1 \end{aligned}$$

一方，$\gamma = \cos\theta + i\sin\theta$ であるから，$\boldsymbol{w = z\gamma^2 - \gamma + 1}$……**(答)**

(2) 題意より，

$$\begin{aligned} w - \alpha &= (z-\alpha)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \\ &= (z-\alpha)(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= (z-\alpha)\gamma^2 \end{aligned}$$

であるから，$w - z\gamma^2 = \alpha - \alpha\gamma^2$ である．また，(1) の結果を用いると，

$$-\gamma + 1 = \alpha - \alpha\gamma^2$$

$$(1-\gamma) = \alpha(1-\gamma)(1+\gamma)$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから，$\gamma \neq \pm 1$ である．したがって，

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{\gamma + 1}}$$……**(答)**

(3)　△OEA が正三角形となるのは，右図より

$$\alpha=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

となるときである．(2) より，

$$\gamma+1=\frac{1}{\alpha}$$

$$\gamma=\frac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}-1$$

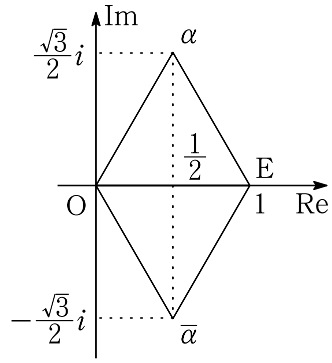
$$\gamma=\overline{\alpha}-1\quad(\because\quad \alpha\overline{\alpha}=1)$$

$$\gamma=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i\quad\text{（複号同順）}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから，

$$\gamma=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$$

となる．ゆえに，$\boldsymbol{\theta=120^\circ}$……(**答**)



◇ ♡

解説

γ は原点のまわりに θ だけ回転する回転移動を表す複素数です．したがって，これをかけることで複素数平面上の点は，原点のまわりに θ だけ回転移動します．点 z を原点以外の点 β のまわりに回転移動する場合は，これを応用します．回転の中心を原点へ平行移動するため β を引きます．そして γ をかけて回転させ再び β を加えて平行移動すれば

$$(z-\beta)\gamma+\beta$$

となり，これが点 β のまわりに θ だけ回転移動した先の複素数を表すことになります．

(3) は，図形的な解釈をすることで α を求めることができます．α が求まれば (2) の結果を用いて γ が求められるので θ を求めることができます．