30 （'14　神戸大） 【難易度】 … 基本

n を自然数とする．1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードを袋に入れ，よくかき混ぜて n 枚を取り出し，取り出した n 枚のカードの数字の合計を A，残された n 枚のカードの数字の合計を B とする．このとき，以下の問いに答えよ．

（1） n が奇数のとき，A と B が等しくないことを示せ．

（2） n が偶数のとき，A と B の差は偶数であることを示せ．

（3） $n=4$ のとき，A と B が等しい確率を求めよ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

(1), (2) は，$A+B$ を考えることで証明をすることができます．背理法を使っても構いません．(3) は，$A=B$ の値を求めることができるので，場合をすべて書き出せば求められます．もらさないように数えることが大切です．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

1 から $2n$ までの数の和が $A+B$ となるので，

$$A+B=\sum_{k=1}^{2n}k=\frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1)=n(2n+1) \cdots\cdots ①$$

である．n が奇数のとき，① より，$n(2n+1)$ は奇数となる．$A+B=$（奇数）となるので，A と B の偶奇は異なるので，A と B は等しくない． **証明終**

（2） **【証明】**

n が偶数のとき，① より，$n(2n+1)$ は偶数となる．$A+B=$（偶数）となるので，A と B の偶奇は一致するので，A と B の差は偶数となる． **証明終**

（3） $n=4$ のとき，1〜8 までの数の和は，① より，

$$A+B=4\cdot(2\cdot 4+1)=36$$

であるから，$A=B$ となるとき，$A=B=18$ である．このとき，4 数の和が 18 となる組合せは，

$$\{(1,2,7,8),(3,4,5,6)\},\ \{(1,3,6,8),(2,4,5,7)\},$$

$$\{(1,4,5,8),(2,3,6,7)\},\ \{(1,4,6,7),(2,3,5,8)\}$$

の 4 通りがあり，A, B への対応を考えると $4\times 2=8$（通り）がある．全事象は，${}_8\mathrm{C}_4=70$（通り）であるから，求める確率は，

$$\frac{8}{70}=\boldsymbol{\frac{4}{35}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

♢ ♡

解説

(1), (2) は証明方法に迷うかもしれませんが，ポイントは $A+B$ が偶数か奇数かというところにあります．方針さえ定まれば完答は難しくないので，差がつく問題といえるかもしれません．(3) は，もれなく場合を求めることがで

きるかがポイントとなります．大切なのは，やみくもに探すのではなく自分なりの規則を決めて探すことです．4 つずつの数に分けるのですから，和が 18 となる数の組が 1 つ見つかれば残った数の和も当然 18 となります．したがって，和が 18 となる数の組をすべて見つければよいのです．解答では，(1, 2, 7, 8) を見つけて 2 を 1 つ大きくし，7 を 1 つ小さくして (1, 3, 6, 8) を求めています．これは，4 数の和を一定にするためにこのような方法で探しています．これと同じ要領で，残り 2 つを求めれば，もれなく探せるでしょう．