29 ('13　大阪府立大) **【難易度】** … 標準

2 つの曲線 $C_1 : y = \log x$ および $C_2 : y = \sqrt{ax}$ を考える．ただし，a は正の定数である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C_1 上の点 $(t, \log t)$ における接線 ℓ_1 の方程式，および曲線 C_2 上の点 $(s, \sqrt{as})$ における接線 ℓ_2 の方程式を求めよ．ただし，$t > 0$, $s > 0$ である．

(2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の両方に接する直線が存在しないための a の値の範囲を求めよ．

【テーマ】：共通接線が存在しない条件

方針

(1) は，曲線上の点における接線を求めるので，公式で処理できます．(2) では，C_1, C_2 の両方に接する直線が存在しない条件を求めるので，ℓ_1, ℓ_2 が一致しないときを考えましょう．

♣ ♠

解答

(1) $y = \log x$ において，$y' = \dfrac{1}{x}$ であるから，点 $(t, \log t)$ における接線 ℓ_1 の方程式は，

$$y = \frac{1}{t}(x - t) + \log t \iff \boldsymbol{\ell_1 : y = \frac{1}{t}x - 1 + \log t} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，$y = \sqrt{ax}$ において，$y' = \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}$ であるから，点 $(s, \sqrt{as})$ における接線 ℓ_2 の方程式は，

$$y = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{s}}(x - s) + \sqrt{as} \iff \boldsymbol{\ell_2 : y = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{s}}x + \frac{\sqrt{as}}{2}} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) C_1 と C_2 の両方に接する直線が存在しない条件は，ℓ_1 と ℓ_2 が一致しないときを考えればよいので，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t} = \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{s}} & \cdots\cdots ① \\ -1 + \log t = \dfrac{\sqrt{as}}{2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす正の実数 s, t が存在しないときである．① より，$\sqrt{s} = \dfrac{\sqrt{a}t}{2}$ であるから，これを ② へ代入して，

$$-1 + \log t = \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a}t}{2} \iff \frac{4(-1 + \log t)}{t} = a$$

$f(t) = \dfrac{4(-1 + \log t)}{t}$ とおくとき，$y = f(t)$ のグラフと $y = a$ のグラフが共有点をもたないような実数 a の値の範囲を求めればよい．

$$f'(t) = \frac{4\left\{\frac{1}{t} \cdot t - (-1 + \log t)\right\}}{t^2} = \frac{4(2 - \log t)}{t^2}$$

$f'(t) = 0$ のとき，$t = e^2$ であるから，増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$(-\infty)$	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘	(0)

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$$

$$\lim_{t \to +0} f(t) = -\infty$$

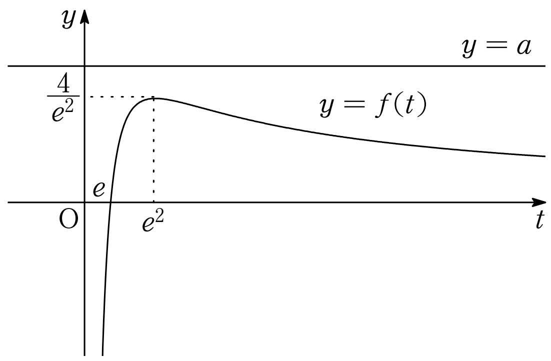
$$f(e^2) = \frac{4}{e^2}$$

よって，グラフは次のようになる．

ゆえに，C_1, C_2 の両方に接する直線が存在しないための a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{a > \frac{4}{e^2}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．



◇ ♡

解説

(1) は基本問題です．計算間違いに気をつけて完答しましょう．(2) では，両方の曲線に接する直線が存在しないということは，ℓ_1 と ℓ_2 が一致しないことであるという部分に気付くことがポイントとなります．また，そのための条件は，ℓ_1, ℓ_2 が一致するとして ①, ② 式を作り，この 2 式が成り立たない，すなわちこの 2 式を満たす実数 s, t が存在しないときであると考えます．あとは，定数分離をしてグラフを用いて a の値の範囲を求めればよいという流れになります．

解答中にある極限計算が疑問に思う人もいると思いますが，次のような考えから求めています．

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{4(-1+\log t)}{t}$ は $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形をした不定形です．本来ならば不等式を作ってはさみうちの原理で極限を計算しますが，ここでは無限大の order，簡単にいうと無限大の大きさを考えて極限を計算しようということです．

$$\underbrace{\log x}_{\text{対数関数}} \ll \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{無理関数}} \ll \underbrace{x^a}_{\text{多項式関数}} \ll \underbrace{a^x}_{\text{指数関数}} \quad (x \to +\infty)$$

$x \ll y$ は x が y に比べてものすごく小さいことを表しています．すなわち $\log t \ll t$ なので，分母の無限大の方が大きいことがわかります．したがって，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{4(-1+\log t)}{t} = 0$ となります．一方で，$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{4(-1+\log t)}{t}$ は不定形の形ではありませんから，そのまま極限の計算をすることができます．

$$\lim_{t\to+0}\frac{4(-1+\log t)}{t} = \lim_{t\to+0}\underbrace{\frac{4}{t}}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{(-1+\log t)}_{\to-\infty} = -\infty$$