28 （'11　富山大）　**【難易度】**… **標準**

放物線 $C : y = x^2 - 4x + 3$ と直線 $\ell : y = mx - m$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　放物線 C と直線 ℓ が接するときの m の値 m_0 を求めよ．

(2)　$m > m_0$ とする．放物線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし，放物線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_1 と S_2 をそれぞれ m を用いて表せ．

(3)　$m > m_0$ における $S_2 - 2S_1$ の最小値，およびそのときの m の値を求めよ．

【テーマ】：面積の最小値

方針

(1) は放物線と直線が接するときを考えるので，判別式で求めます．(2) は放物線と直線の交点の x 座標を具体的に求めて面積を計算します．(3) は，面積の最小値なので，m を変数として考え微分します．

♣ ♠

解答

(1)　放物線 C と直線 ℓ が接するとき，

$$x^2 - 4x + 3 = mx - m \iff x^2 - (m+4)x + m + 3 = 0 \cdots\cdots ①$$

の判別式を D とすると，$D = 0$ であればよいので，

$$D = (m+4)^2 - 4(m+3) = 0 \iff (m+2)^2 = 0$$

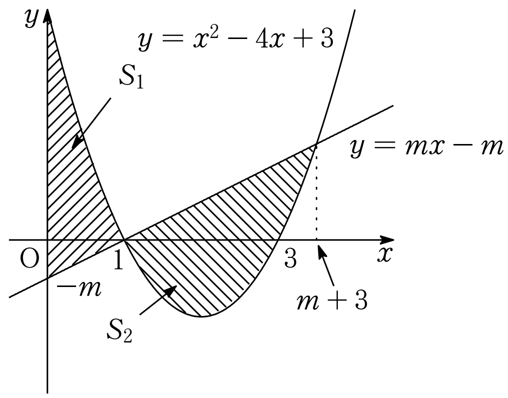
したがって，$m = -2$ であるから，$\boldsymbol{m_0 = -2}$……**(答)**

(2)　$m > -2$ のとき，$D > 0$ であるから，放物線 C と直線 ℓ は異なる 2 点で交わる．① 式は，

$$(x-1)(x-m-3) = 0 \cdots\cdots (*)$$

と因数分解することができるので，放物線Cと直線ℓの交点の x 座標は，$x = 1,\ m+3$ である．したがって，

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \{(x^2 - 4x + 3) - (mx - m)\}\,dx \\ &= \int_0^1 \{x^2 - (m+4)x + m + 3\}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{m+4}{2}x^2 + (m+3)x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{m+4}{2} + (m+3) \\ &= \boldsymbol{\frac{3m+8}{6}} \cdots\cdots \textbf{(答)} \end{aligned}$$



である．また，

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^{m+3} \{(mx - m) - (x^2 - 4x + 3)\}\,dx \\ &= -\int_1^{m+3} (x-1)(x-m-3)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(3 + m - 1)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(m+2)^3} \cdots\cdots \textbf{(答)} \end{aligned}$$

である．

(3) (2) より,

$$S_2 - 2S_1 = \frac{1}{6}(m+2)^3 - 2\cdot\frac{3m+8}{6}$$
$$= \frac{1}{6}(m^3+6m^2+12m+8) - m - \frac{8}{3}$$
$$= \frac{1}{6}m^3 + m^2 + m - \frac{4}{3}$$

ここで, $f(m) = \frac{1}{6}m^3 + m^2 + m - \frac{4}{3}$ とおくと,

$$f'(m) = \frac{1}{2}m^2 + 2m + 1 = \frac{1}{2}(m^2+4m+2)$$

であるから, $f'(m) = 0$ のとき, $m^2+4m+2=0$ すなわち $m = -2 \pm \sqrt{2}$ である. $m > -2$ であることから, $\alpha = -2+\sqrt{2}$ とおくと, 増減表は次のようになる.

m	-2	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(m)$		$-$	0	$+$
$f(m)$		↘		↗

ゆえに, $f(m)$ は $m = \alpha$ のとき最小値をとる. $\alpha = -2+\sqrt{2}$ であるから,

$$f(\alpha) = \frac{1}{6}(\alpha+2)^3 - 2\cdot\frac{3\alpha+8}{6}$$
$$= \frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{2+3\sqrt{2}}{3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{-2-2\sqrt{2}}{3}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は, 判別式を用いて求めましたが, ① が $(x-1)(x-m-3)=0$ と因数分解できることがこの時点で分かっていれば, $m+3=1$ として $m=-2$ を得ることができます. (2) で放物線 C と直線 ℓ の交点の x 座標を求めなければいけないので, 後で因数分解できることに気付いた人も多いかもしれません.

(2) は, 面積を求めるため放物線 C と直線 ℓ の交点の x 座標を求めて積分計算を行います. S_1 は定積分の計算を教科書通りに実行すれば求められます. S_2 は放物線と直線で囲まれる図形の面積なので公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を用いましょう.

(3) は, $S_2 - 2S_1$ の最小値を求める問題で m が変数となります. そのため, $f(m) = S_2 - 2S_1$ として関数 $f(m)$ を定めて微分を利用して最大値を求めます. 本問では, $f(m) = \frac{1}{6}(m+2)^3 - 2\cdot\frac{3m+8}{6}$ という式に $m = \alpha = -2+\sqrt{2}$ を代入すれば比較的計算が楽なので, $f(m) = \frac{1}{6}m^3 + m^2 + m - \frac{4}{3}$ に代入するより計算間違いは避けられるでしょう. 闇雲に計算をするのではなく, 効率よく計算できるように日頃から訓練しておきましょう. なお, このように代入する値が複雑な場合は, 整式の除法を用いることで計算を簡単にすることもできます.
α は, $\alpha^2+4\alpha+2=0$ を満たすので, $f(\alpha)$ を $\alpha^2+4\alpha+2$ で割った商と余りを求めます. そうすると, 次のように式変形できます.

$$f(\alpha) = (\alpha^2+4\alpha+2)\left(\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\alpha - 2$$

$\alpha = -2+\sqrt{2}$ なので, $\alpha^2+4\alpha+2=0$ となるため,

$$f(\alpha) = \frac{2}{3}\alpha - 2 = \frac{2}{3}(-2+\sqrt{2}) - 2 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{3}$$

となります.