27 （'12　東北大）　**【難易度】** … やや難

$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=\sqrt{3},\ \angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 ABC を考える．n を 2 以上の自然数とし，辺 AB を n 等分して得られる点を A に近い方から順に $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{n-1}$ とする．A を P_0，B を P_n とおくとき，以下の問いに答えよ．

（1） 三角形 $\mathrm{P}_k\mathrm{CP}_{k+1}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ の内接円の半径を求めよ．

（2） 三角形 $\mathrm{P}_k\mathrm{CP}_{k+1}$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$ の内接円の面積の総和を S_n とする．

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$$

とおくと，$nS_n \leqq \dfrac{3\pi}{4}I_n$ となることを示せ．また，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

（3） 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ．

【テーマ】：区分求積法

方針

(1) は，三角形の面積を利用して内接円の半径を求めます．(2) は，不等式を示すための式変形を工夫するのが難しいでしょう．(3) は，(2) の不等式を参考にはさみうちの原理を用いて求めることを考えます．

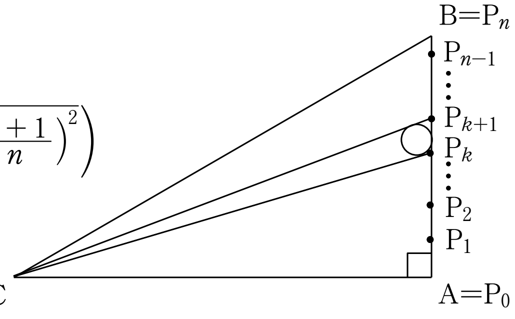
♣ ♠

解答

（1） 題意より，

$$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}=\frac{1}{n},\quad \mathrm{P}_k\mathrm{C}=\sqrt{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2},\quad \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{C}=\sqrt{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}$$

であるから，内接円の半径を r_k とすると，



$$\triangle \mathrm{P}_k\mathrm{CP}_{k+1}=\frac{1}{2}r_k(\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}+\mathrm{P}_k\mathrm{C}+\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{C})$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}r_k\left(\frac{1}{n}+\sqrt{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}+\sqrt{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}\right)$$

$$r_k=\frac{\sqrt{3}}{n\left(\dfrac{1}{n}+\sqrt{3+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}+\sqrt{3+\left(\dfrac{k+1}{n}\right)^2}\right)}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r_k=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3n^2+k^2}+\sqrt{3n^2+(k+1)^2}}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2） **【証明】**

$S_k=\pi {r_k}^2$ より，

$$nS_n=\sum_{k=0}^{n-1}nS_k=\sum_{k=0}^{n-1}n\pi {r_k}^2=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{n\left(\dfrac{1}{n}+\sqrt{3+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}+\sqrt{3+\left(\dfrac{k+1}{n}\right)^2}\right)^2}$$ ☞ 解説 ①

$$\leqq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{n\left(2\sqrt{3+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{3+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}=\frac{3\pi}{4}I_n$$

ゆえに，示された．　　**（証明終）**

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{3+x^2}\,dx$ であるから，$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta$

より，

$$\int_0^1\frac{1}{3+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{18}\pi}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{6}$

(3)　(2) と同様にして nS_n を下から評価する．

$$nS_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{n\left(\frac{1}{n}+\sqrt{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}+\sqrt{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}\right)^2}\ ☞\ \boxed{解説}\ ②$$
$$>\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{\left(\frac{1}{n}+2\sqrt{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}\right)^2}\ ☞\ \boxed{解説}\ ③$$
$$>\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{\left(\frac{1}{n}\sqrt{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}+2\sqrt{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3\pi}{\left(\frac{1}{n}+2\right)^2}\cdot\frac{1}{3+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{3\pi}{\left(\frac{1}{n}+2\right)^2}\cdot\frac{1}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{3\pi}{\left(\frac{1}{n}+2\right)^2}\cdot\frac{1}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\pi}{\left(\frac{1}{n}+2\right)^2}I_n=\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{18}\pi=\frac{\sqrt{3}}{24}\pi^2$$

である．したがって，この結果と (2) の結果よりはさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}nS_n=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{24}\pi^2}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である．

◇　♡

$\boxed{解説}$

(1) では，一般に三角形 ABC の内接円の半径を r とすると，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$ が成り立つことを用いて求めます．$\angle\mathrm{P}_k\mathrm{AC}=\dfrac{\pi}{2}$ なので，三平方の定理を用いれば，$\mathrm{P}_k\mathrm{C}$, $\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{C}$ を求めることができます．答えは，整理しましたが，(2) 以降の計算は問題文から考えると $\dfrac{k}{n}$ の形で式変形をする方がよいでしょう．

(2) では，不等式を証明する際の式変形が難しいでしょう．

①　この式から次の式への式変形では，$\dfrac{k}{n}\leqq\dfrac{k+1}{n}$ であることと $\dfrac{1}{n}>0$ であることを用いて**分母が小さくなるように**式変形をしています．これによって分数全体は大きくなるので，解答のように I_n を導くことができます．

(3) では，(2) で示した不等式がヒントになります．方針でも述べたようにはさみうちの原理を用いて極限値を求めることは予想できますから，nS_n を下から評価する必要があります．そのために (2) での式変形をヒントにして nS_n より値が小さい式を導きます．

②　この式から次の式への式変形では，(2) とは逆に $\dfrac{k}{n}\leqq\dfrac{k+1}{n}$ であることを用いて**分母が大きくなるように**式変形をしています．これによって分数全体は小さくなります．

③　さらに次の式への式変形では，$\dfrac{1}{n}$ に 1 より大きい数 $\sqrt{3+\left(\dfrac{k+1}{n}\right)^2}$ をかけて分母をさらに大きくします．この式を選んだ理由は，次の式変形で因数分解ができるからです．試行錯誤で見つけないといけないため経験を積んで先を見る目を養っておく必要があります．