25 （'14　筑波大）　　**【難易度】** … 標準

関数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ を $x>0$ で考える．$y=f(x)$ のグラフの点 $(a,\ f(a))$ における接線を ℓ_a とし，ℓ_a と y 軸との交点を $(0,\ Y(a))$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，実数 k に対して $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^k e^{-t}=0$ であることは証明なしで用いてよい．

(1)　$Y(a)$ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　$0<a<b$ である a, b に対して，ℓ_a と ℓ_b が x 軸上で交わるとき，a のとりうる値の範囲を求め，b を a で表せ．

(3)　(2) の a, b に対して，$Z(a)=Y(a)-Y(b)$ とおく．$\displaystyle\lim_{a\to+0}Z(a)$ および $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{Z'(a)}{a}$ を求めよ．

【テーマ】：接線と最大・最小

方針

(1) は，接線 ℓ_a の方程式を求めて，y 軸との交点を求め，その最大値を考えます．
(2) は，ℓ_a と ℓ_b が x 軸上で交わるので，それぞれの x 軸との交点が一致することから式を立てます．(3) は，与えられた極限値の式 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^k e^{-t}=0$ を利用して極限値を求めます．

♣　♠

解答

(1)　$f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ より，接線 ℓ_a の方程式は，

$$y=-ae^{-\frac{a^2}{2}}(x-a)+e^{-\frac{a^2}{2}} \iff y=-ae^{-\frac{a^2}{2}}x+(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$$

であるから，これより

$$Y(a)=(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$$

$$Y'(a)=2ae^{-\frac{a^2}{2}}+(a^2+1)\cdot(-a)e^{-\frac{a^2}{2}}=(-a^3+a)e^{-\frac{a^2}{2}}$$

となるので，$e^{-\frac{a^2}{2}}>0$ であることから，$Y'(a)=0$ のとき，$-a^3+a=0$ である．$a>0$ より $a=0, 1$ であるから，増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
$Y'(a)$	0	$+$	0	$-$	
$Y(a)$	1	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	(0)

$$\lim_{a\to+\infty}(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}=\lim_{t\to\infty}(2t+1)e^{-t}\ \left(\because\ \frac{a^2}{2}=t\right)$$
$$=0\ \cdots\cdots(*)$$

ゆえに，$\boldsymbol{0<Y(a)\leqq\frac{2}{\sqrt{e}}}$……(**答**)

(2)　(1) より，

$$\ell_a\ :\ y=-ae^{-\frac{a^2}{2}}x+(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$$

$$\ell_b\ :\ y=-be^{-\frac{b^2}{2}}x+(b^2+1)e^{-\frac{b^2}{2}}$$

ℓ_a と ℓ_b が x 軸上で交わるときは，$y=0$ としたときの x の値が等しければよいので，$e^{-\frac{a^2}{2}}\neq0,\ e^{-\frac{b^2}{2}}\neq0$ より，

$$\frac{a^2+1}{a}=\frac{b^2+1}{b} \iff (ab-1)(a-b)=0$$

$a \fallingdotseq b$ より，$ab=1$ であるから，$\boldsymbol{b=\dfrac{1}{a}}$……(**答**)

また，$0<a<b$ より，

$$0<a<\frac{1}{a} \iff 0<a^2<1$$

$a>0$ より，$\boldsymbol{0<a<1}$……(**答**)

(3) (1) より，

$$\lim_{a\to+0} Y(a)=\lim_{a\to+0}(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}=1,\quad \lim_{a\to+0} Y(b)=\lim_{a\to+0} Y\left(\frac{1}{a}\right)$$

$\dfrac{1}{a}=t$ とおくと，$a\to+0$ のとき，$t\to+\infty$ であるから，

$$\lim_{a\to+0} Y\left(\frac{1}{a}\right)=\lim_{t\to+\infty} Y(t)=0 \quad (\because\ (*))$$

ゆえに，

$$\lim_{a\to+0} Z(a)=1-0=\mathbf{1}\text{……(答)}$$

また，

$$\begin{aligned} Z'(a)&=Y'(a)-Y'\left(\frac{1}{a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{a^2}\right)\\ &=Y'(a)+\frac{1}{a^2}Y'\left(\frac{1}{a}\right)\\ \frac{Z'(a)}{a}&=\frac{1}{a}Y'(a)+\frac{1}{a^3}Y'\left(\frac{1}{a}\right)\\ &=(-a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}+\frac{1}{a^3}\left(-\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a}\right)e^{-\frac{1}{2a^2}}\ \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{1}{2a^2}=u$ とおくと，$a\to+0$ のとき，$u\to+\infty$ であるから，

$$\lim_{a\to+0}\frac{1}{a^3}\left(-\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a}\right)e^{-\frac{1}{2a^2}}=\lim_{u\to+\infty}(-8u^3+4u^2)e^{-u}=0 \quad \left(\because\ \lim_{t\to\infty}t^ke^{-t}=0\right)$$

ゆえに，① より，

$$\lim_{a\to+0}\frac{Z'(a)}{a}=1+0=\mathbf{1}\text{……(答)}$$

◇ ♡

解説

(1) は，接線の方程式を求めて y 軸との交点を求めその最大値を考えればよいのですが，解答にもあるように $a\to+\infty$ の場合を調べる必要があります．$Y(a)$ の式から $Y(a)>0$ であることは予想できますが，$a\to+\infty$ の極限値が 0 から 1 の間に存在する可能性もあるので，調べなければ減点されるでしょう．

(2) は，2 接線の交点を求めるのではなく，2 接線が x 軸上で交わるので，x 軸との交点が一致すると考える方が計算が楽に行えます．ここでは，$a \fallingdotseq b$ であることから a, b の関係式が導けます．

(3) は，極限値の問題なので，曖昧な極限値の計算をすることがないようにしましょう．問題文に与えられている $\lim\limits_{t\to\infty}t^ke^{-t}=0$ を使うために式変形をして，極限値を求めていきます．