24 ('14　信州大) **【難易度】** … 標準

3 個の玉が横に一列に並んでいる．コインを 1 回投げて，それが表であれば，そのときに中央にある玉とその左にある玉とを入れ替える．また，それが裏であれば，そのときに中央にある玉とその右にある玉とを入れ替える．この操作を繰り返す．

(1)　最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を求めよ．

(2)　最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率を求めよ．

【テーマ】：確率と漸化式

方針

(1) は，最初に中央にあった玉が n 回後に中央にある確率を p_n として，数列 $\{p_n\}$ に関する漸化式を立てます．
(2) は，最初に右端にあった玉が n 回後に右端にある確率を q_n としますが，これだけでは漸化式が立てられないので，n 回後に中央にある確率を r_n として，漸化式を立てます．

♣ ♠

解答

(1)　最初に中央にあった玉が n 回後に中央にある確率を p_n とすると，n 回目に中央にあった玉が $n+1$ 回後に中央に来ることはないので，n 回後に左または右にあった玉が $n+1$ 回後に中央に来るときを考える．
いずれにしても確率 $\frac{1}{2}$ で中央に来るので，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-p_n) \iff p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

となる．ゆえに，

$$p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である．$p_1=0$ であるから，

$$p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \iff \boldsymbol{p_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　最初に右端にあった玉が n 回後に右端にある確率を q_n，中央にある確率を r_n とすると，

(i)　n 回後に右端にある玉が $n+1$ 回後に右端に来るのは，表が出たときである．

(ii)　n 回後に中央にある玉が $n+1$ 回後に右端に来るのは，裏が出たときである．

ゆえに，

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．ここで，数列 $\{r_n\}$ について考える．(1) と同様に考えると，

$$r_{n+1}=\frac{1}{2}(1-r_n) \text{ より，} r_n=\frac{1}{3}+\left(r_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である．よって，$r_1=\frac{1}{2}$ より，

$$r_n=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\} \cdots\cdots ②$$

である．① の両辺に 2^{n+1} をかけると，

$$2^{n+1}q_{n+1}=2^nq_n+2^nr_n$$

となるので，$a_n = 2^n q_n$ とおくと，

$$a_{n+1} = a_n + 2^n r_n$$

$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k r_k \\
&= 2q_1 + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\{2^k - (-1)^k\} \\
&= 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left\{\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - \frac{(-1)\cdot\{1-(-1)^{n-1}\}}{1-(-1)}\right\} \\
&= 1 + \frac{2^n-2}{3} + \frac{1-(-1)^{n-1}}{6}
\end{aligned}$$

$$2^n q_n = \frac{1}{2} + \frac{2^n}{3} + \frac{(-1)^n}{6}$$

$$q_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

これは，$n = 1$ のときも成り立つ．ゆえに，求める確率は，

$$\boldsymbol{q_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

漸化式を作るときは，n 回後の状況と，$n+1$ 回後の状況を考えます．(1) は，中央にある確率なので，右端から来る確率と左端から来る確率がともに $\frac{1}{2}$ であることから，まとめて考えることができます．すなわち，中央にない確率を $1-p_n$ とすればよいのです．(2) は右端にある確率を考えるため，(1) のようにはいきません．そこで，n 回後に中央にある確率を設定して q_n と r_n を用いて漸化式を導きます．このままでは解けないので，(1) をヒントに r_n を求めればよいことに気付くことがポイントとなります．あとは，漸化式の問題なので頻出の漸化式は必ず解けるようにしておきましょう．