23 （'10　千葉大） **【難易度】** … 標準

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O(0, 0), A(1, 0) をとる．曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が，3 条件

（i） $p>0,\ q>0$

（ii） $\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

（iii） $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

をみたしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ．

【テーマ】：加法定理の応用

方針

tan∠POPQ を求めたいので，直線の傾きと $\tan\theta$ の関係を考えます．この他にもベクトルの内積を用いても求めることができます．

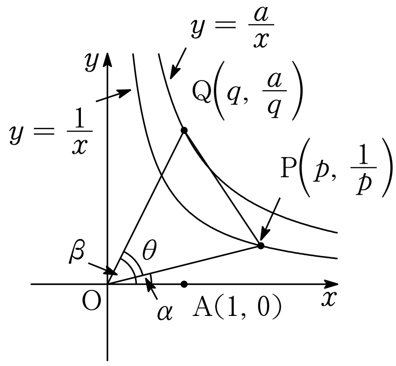
解答

直線 OP, OQ の傾きはそれぞれ $\dfrac{1}{p^2}$, $\dfrac{a}{q^2}$ であり，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$, $\angle\mathrm{AOQ}=\beta$ とおくと，条件 (ii) より，$\alpha<\beta$ である．また，

$$\tan\alpha=\frac{1}{p^2},\quad \tan\beta=\frac{a}{q^2}$$

であるから，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ とすると，$\theta=\beta-\alpha$ となる．したがって，

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(\beta-\alpha)\\&=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\\&=\frac{\dfrac{a}{q^2}-\dfrac{1}{p^2}}{1+\dfrac{a}{q^2}\cdot\dfrac{1}{p^2}}\\&=\frac{ap^2-q^2}{p^2q^2+a}\ \cdots\cdots ①\end{aligned}$$



一方，(iii) より，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OPQ}&=\frac{1}{2}\left|\frac{q}{p}-\frac{ap}{q}\right|\\3&=\frac{1}{2}\left|\frac{q^2-ap^2}{pq}\right|\ \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

である．ここで，$\tan\theta>0$ であり，$a>1$ であるから，① より，$ap^2-q^2>0$ である．したがって，条件 (i) を用いると，② より，

$$6pq=ap^2-q^2\ \cdots\cdots ③$$

を得るので，① へ代入して，

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{6pq}{p^2q^2+a}\\&=\frac{6}{pq+\dfrac{a}{pq}}\end{aligned}$$

$pq>0,\ a>1$ であるから，相加平均・相乗平均の関係から，

$$pq+\frac{a}{pq} \geqq 2\sqrt{pq\cdot\frac{a}{pq}}=2\sqrt{a}$$

等号は，$pq=\dfrac{a}{pq}$ すなわち $pq=\sqrt{a}$ のとき成立するので，これを満たす $p,\ q$ が存在するかどうかを確かめる．

$q=\dfrac{\sqrt{a}}{p}$ であるから，③ へ代入して，

$$6\sqrt{a}=ap^2-\frac{a}{p^2} \iff ap^4-6\sqrt{a}p^2-a=0$$

$t=p^2$ とおくと，$t\geqq 0$ であり，$at^2-6\sqrt{a}t-a=0$ となるが，$f(t)=at^2-6\sqrt{a}t-a$ とおくとき，$a>1$ であり，$f(0)=-a<0$ となることから，$f(t)=0$ は 0 より大きい実数解をもつことがわかる．すなわち，正の数 p は存在することが確かめられたので，等号は成立する．ゆえに，

$$\tan\theta \leqq \frac{6}{2\sqrt{a}}=\frac{3}{\sqrt{a}}$$

となり，最大値 $\dfrac{3}{\sqrt{a}}$ をもつ．これが $\dfrac{3}{4}$ と等しいことから，

$$\frac{3}{\sqrt{a}}=\frac{3}{4} \iff \boldsymbol{a=16}$$……**(答)**

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

2 直線のなす角 θ を求める方法は,

(i) 直線の傾きと $\tan\theta$ の関係

(ii) ベクトルの内積

の 2 通りの考え方があります. (i) は，教科書などでもおなじみで $\tan\theta$ の加法定理を用いて求める方法です．本問の解答はこれを用いています. (ii) は，例えば傾きが m の直線があればその方向ベクトルの 1 つとして $\vec{d}=(1,\ m)$ をとることができるので，2 直線の方向ベクトルを求めれば，ベクトルの内積でなす角を求めることができます．ただし，この場合は $\cos\theta$ が出てくるので，$\tan\theta$ が求めたければ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を用いて式変形をしなければいけません.

本問では，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ となるので，

$$\cos\angle\mathrm{POQ}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}$$

を用いて，$\cos\theta$ を求めます．問題によって，(i), (ii) のどちらで解くと効率よく計算できるかを考えて解法の選択ができるようにしておくとよいでしょう．

