19 （′13　千葉大） 【難易度】 … 標準

1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を 1：2 に内分する点を D とする．また，辺 OC 上に点 E をとり，CE ＝ t とする．

（1） AD の長さを求めよ．

（2） $\cos\angle\mathrm{DAE}$ を t を用いて表せ．

（3） △ADE の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ．

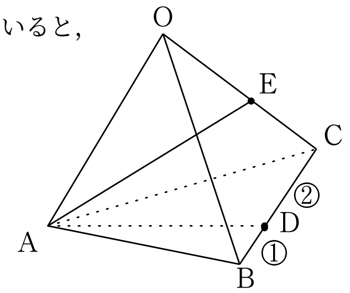
【テーマ】：空間図形の計量

方針

空間図形といっても一つ一つの問題は平面図形の問題と考えることができます．余弦定理を利用して計算を進めていきます．

♣ ♠

解答



（1） AB ＝ 3, BD ＝ 1, ∠ABD ＝ 60° より，△ABD において余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cdot\cos\angle\mathrm{ABD}\\ &= 9+1-2\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}\\ &= 7\end{aligned}$$

AD ＞ 0 より，AD ＝ $\boldsymbol{\sqrt{7}}$……(**答**)

（2） （1）と同様に考えると，△ACE において余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AE}^2 &= \mathrm{AC}^2+\mathrm{EC}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{EC}\cdot\cos\angle\mathrm{ACE}\\ &= 9+t^2-2\cdot3\cdot t\cdot\frac{1}{2}\\ &= t^2-3t+9\end{aligned}$$

AE ＞ 0 より，AE ＝ $\sqrt{t^2-3t+9}$ である．さらに，△EDC において余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{ED}^2 &= \mathrm{DC}^2+\mathrm{EC}^2-2\mathrm{DC}\cdot\mathrm{EC}\cdot\cos\angle\mathrm{ECD}\\ &= 4+t^2-2\cdot2\cdot t\cdot\frac{1}{2}\\ &= t^2-2t+4\end{aligned}$$

ED ＞ 0 より，ED ＝ $\sqrt{t^2-2t+4}$ である．ゆえに，△AED において余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{DAE} &= \frac{\mathrm{AE}^2+\mathrm{AD}^2-\mathrm{ED}^2}{2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AD}}\\ &= \frac{t^2-3t+9+7-(t^2-2t+4)}{2\cdot\sqrt{t^2-3t+9}\cdot\sqrt{7}}\\ &= \boldsymbol{\frac{-t+12}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}}}\text{……(答)}\end{aligned}$$

（3） （2）から，

$$\begin{aligned}\sin^2\angle\mathrm{DAE} = 1-\cos^2\angle\mathrm{DAE} &= 1-\frac{(-t+12)^2}{28(t^2-3t+9)}\\ &= \frac{27t^2-60t+108}{28(t^2-3t+9)}\end{aligned}$$

$\sin\angle\mathrm{DAE}>0$ より，$\sin\angle\mathrm{DAE}=\dfrac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}}$ であるから，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ADE}&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}\cdot\sin\angle\mathrm{DAE}\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}\cdot\frac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{27t^2-60t+108}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{27\left(t-\frac{10}{9}\right)^2+\frac{224}{3}}\end{aligned}$$

$0\leqq t\leqq 3$ であるから，$\triangle\mathrm{ADE}$ は $t=\dfrac{10}{9}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{224}{3}}=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$ をとる．ゆえに，$\triangle\mathrm{ADE}$ は

$t=\dfrac{10}{9}$ のとき，最小値 $\dfrac{\sqrt{42}}{3}$……(答)

をとる．

◇ ♡

解説

四面体から三角形を取り出し，余弦定理で辺の長さや角の三角比を求めます．$\triangle\mathrm{ADE}$ の面積は $\dfrac{1}{4}\sqrt{27t^2-60t+108}$ となりますが，根号内が最小値をとるときが面積が最小になるときであることはすぐにわかるので，2 次関数の最小値を求める問題になります．もしもこれが分数式になったときは，相加平均・相乗平均の関係を用いたり，分母にだけ変数 t が存在するように式変形をしたりと工夫が必要になりますが，理系の人は数学 Ⅲ の微分法を用いて最大値・最小値を求めることもできます．問題文中には書かれていませんが，t のとり得る値の範囲を書くのを忘れないようにしましょう．これがなくても答えとしては正しいものが出てきますが，t の範囲がないために減点されてしまいます．