18 （′06　富山大） **【難易度】** … ややや難

次の問いに答えよ．

（1）a, b を $a<b$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<1$ を満たす任意の自然数とするとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ の最大値が $\dfrac{5}{6}$ であることを証明せよ．

（2）a, b, c を $a<b<c$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<1$ を満たす任意の自然数とするとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ の最大値が $\dfrac{41}{42}$ であることを証明せよ．

【テーマ】：整数問題

方針

a, b が自然数であることから，与えられた式を不等式を用いて評価します．

解答

（1）**【証明】**

(i) $a=1$ のときは明らかに不適．

(ii) $a=2$ のとき，$a<b$ より $b \geqq 3$ であるから，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

(iii) $a \geqq 3$ のとき，$a<b$ より $b \geqq 4$ であるから，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leqq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}<\frac{5}{6}$$

よって，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ の最大値は $\dfrac{5}{6}$ である．

（2）**【証明】**

(i) $a=1$ のときは，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<0$ となり不適．

(ii) $a=2$ のとき，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{2}$ で $b \geqq 3$ である．

(ア) $b=3$ のとき，

$$\frac{1}{c}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \text{ より } c>6$$

よって，$c \geqq 7$ となる．このとき，

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{10}{21}$$

ゆえに，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ の最大値は $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{41}{42}$ である．

(イ) $b \geqq 4$ のとき，$c \geqq 5$ であるから，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}<\frac{41}{42}$$

ゆえに，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ の最大値は $\dfrac{41}{42}$ である．

(iii) $a \geqq 3$ のとき，$b \geqq 4$, $c \geqq 5$ であるから，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}<\frac{41}{42}$$

ゆえに，(i)〜(iii) より，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ の最大値は $\dfrac{41}{42}$ であることが示された． **（証明終）**

◇ ♡

解説

条件が不等式で与えられていることと, 自然数であることを利用します. a, b の値が大きくなりすぎると $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ の値は小さくなるので, a, b の値はそれほど大きくないということに気付くことがポイントです. 証明をする前に, $a=1, 2, 3\cdots$ 等としてみて目星をつけるとよいでしょう. ただし, すべての自然数を調べることはできませんから, a がある値以上であれば, 最大となることはないということを述べておく必要があります. (1) では $a \geqq 3$ のときは, 最大でも $\dfrac{7}{12}$ にしかならないので, $a=2$ で調べていた値が最大であると言えるわけです. (2) でも同様にしますが文字が 3 つあるので丁寧に調べましょう.