17 （′00　徳島大） 【難易度】 … 標準

複素数 $w = u + vi$ (u, v は実数，i は虚数単位) に対して，実部 u を $\mathrm{Re}(w)$，虚部 v を $\mathrm{Im}(w)$ と表す．

(1)　複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数) に対して，$\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ と $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を x, y で表せ．

(2)　$\dfrac{1}{2} \leqq \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) \leqq 1$ かつ $\dfrac{1}{4} \leqq \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) \leqq \dfrac{1}{2}$ を満たす複素数 z の存在する領域を複素数平面上に図示せよ．

(3)　複素数 z が (2) で定まる領域を動くとき，z の絶対値 $|z|$ のとる最小値と最大値を求めよ．また，それらを与える z を求めよ．

【テーマ】：複素数平面

方針

xy 平面と同じように考えて図示します．

♣　♠

解答

(1)　$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+yi} = \dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$ より，

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \boldsymbol{\frac{x}{x^2+y^2}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \boldsymbol{-\frac{y}{x^2+y^2}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　(1) より，

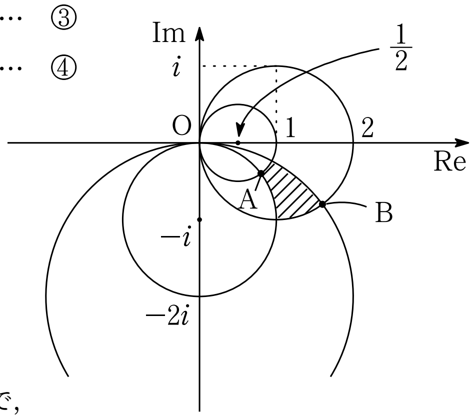
$$\frac{1}{2} \leqq \frac{x}{x^2+y^2} \leqq 1 \iff x^2+y^2 \leqq 2x \leqq 2(x^2+y^2)$$

$$\iff \begin{cases} (x-1)^2+y^2 \leqq 1 & \cdots\cdots ① \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2 \geqq \dfrac{1}{4} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$$\frac{1}{4} \leqq -\frac{y}{x^2+y^2} \leqq \frac{1}{2} \iff x^2+y^2 \leqq -4y \leqq 2(x^2+y^2)$$

$$\iff \begin{cases} x^2+(y+2)^2 \leqq 4 & \cdots\cdots ③ \\ x^2+(y+1)^2 \geqq 1 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

①～④ より，z の存在する範囲を複素数平面上に図示すると，右図の斜線部分のようになる．(境界線上の点を含む)



(3)　$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ であるから，$x^2+y^2 = r^2$ とおくと，これは原点を中心とした半径 r の円を表している．(2) の図中の点 A を $x^2+y^2=r^2$ が通るとき r は最小で，点 B を通るとき r は最大となる．

点 A は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$, $x^2+(y+1)^2=1$ の交点なので，

$$\mathrm{A}\left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

点 B は $(x-1)^2+y^2=1$, $x^2+(y+2)^2=4$ の交点なので，

$$\mathrm{B}\left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

である．したがって，求める $|z|$ の最大値と最小値は，

$$\begin{cases} \textbf{最大値} \quad \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \quad \left(z = \dfrac{8}{5} - \dfrac{4}{5}i\right) \\ \textbf{最小値} \quad \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \quad \left(z = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i\right) \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

複素数平面の問題は，xy 平面の問題として考えることができます．具体的に $z = x + yi$ と与えられているので，x, y に関する式を作ることができれば，xy 平面に図示しているのと同じです．ただし，複素数平面上に図示せよとあるので，軸の取り方には注意をしましょう．

(3) では，$|z|$ のとり得る値を求めますが，これは，$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ であることから $x^2 + y^2 = r^2$ として，原点を中心とした半径 r の円を考えます．この円が (2) で求めた領域と共有点をもつときの r の値の範囲を求めればよいのです．したがって，r が最小となるときはどこを通るのか？ r が最大になるときはどこを通るのか？ (2) である程度図を正確にかいておかなければ判断に迷うでしょう．