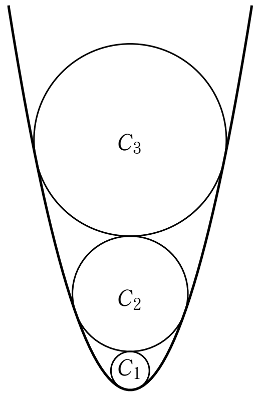
16　（'04　大阪大）　**【難易度】**…**標準**

座標平面上で不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D とする．D 内にあり y 軸上に中心をもち原点を通る円のうち，最も半径の大きい円を C_1 とする．自然数 n について，円 C_n が定まったとき，C_n の上部で C_n に外接する円で，D 内にあり y 軸上に中心をもつもののうち，最も半径の大きい円を C_{n+1} とする．C_n の半径を a_n とし，$b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする．

（1）　a_1 を求めよ．

（2）　$n \geqq 2$ のとき a_n を b_{n-1} で表せ．

（3）　a_n を n の式で表せ．



【テーマ】：図形と漸化式

方針

(1) は，円が領域 $y \geqq x^2$ の内部にある条件を考えます．(2) は，接する条件を判別式から導きます．

♣　♠

解答

（1）　y 軸の正の部分に中心をもち原点を通る円の半径を r とすると，その方程式は，

$$x^2 + (y-r)^2 = r^2$$

であり，この円が領域 $y \geqq x^2$ の内部にあるためには

$$y + (y-r)^2 \geqq r^2 \iff y\{y-(2r-1)\} \geqq 0$$

が円上の任意の y $(y \geqq 0)$ に対して成り立てばよい．そのための r の範囲は，

$$2r - 1 \leqq 0 \text{ より，} 0 < r \leqq \frac{1}{2}$$

であるから，円 C_1 の半径 a_1 の値は，$\boldsymbol{a_1 = \dfrac{1}{2}}$……**(答)**

（2）　$n \geqq 2$ のとき，円 C_n の中心は $(0,\ a_n + 2b_{n-1})$ であるから，C_n の方程式は，

$$x^2 + (y - a_n - 2b_{n-1})^2 = {a_n}^2$$

である．C_n は放物線 $y = x^2$ に接するので，y に関する 2 次方程式

$$y + (y - a_n - 2b_{n-1})^2 = {a_n}^2$$

$$y^2 - (2a_n + 4b_{n-1} - 1)y + (a_n + 2b_{n-1})^2 - {a_n}^2 = 0$$

が重解をもつ．判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D &= (2a_n + 4b_{n-1} - 1)^2 - 4\{(a_n + 2b_{n-1})^2 - {a_n}^2\} \\ &= 4{a_n}^2 - 4a_n + 1 - 8b_{n-1} \\ &= (2a_n - 1)^2 - 8b_{n-1} \end{aligned}$$

$D = 0$ であればよいので，

$$(2a_n - 1)^2 = 8b_{n-1}$$

$n \geqq 2$ であるから,

$$2a_n - 1 > 2a_1 - 1 = 0 \text{ かつ } b_{n-1} > 0$$

である．よって,

$$2a_n - 1 = 2\sqrt{2b_{n-1}}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \sqrt{2b_{n-1}} + \frac{1}{2}} \ \ \boldsymbol{(n \geqq 2)} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) $n \geqq 2$ のとき, $a_n = b_n - b_{n-1}$ であるから, (2) で求めた式より,

$$b_n - b_{n-1} = \sqrt{2b_{n-1}} + \frac{1}{2}$$

$$b_n = b_{n-1} + \sqrt{2b_{n-1}} + \frac{1}{2} = \left(\sqrt{b_{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\therefore \quad \sqrt{b_n} = \sqrt{b_{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (n \geqq 2)$$

数列 $\{\sqrt{b_n}\}$ は初項 $\sqrt{b_1} = \sqrt{a_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 公差 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の等差数列であるから,

$$\sqrt{b_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} + (n-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{b_n} = \frac{n}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{n^2}{2}$$

よって, $n \geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} a_n &= b_n - b_{n-1} \\ &= \frac{n^2}{2} - \frac{(n-1)^2}{2} \\ &= n - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

これは, $n = 1$ のときも成り立つので,

$$\boldsymbol{a_n = n - \frac{1}{2}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

最も半径の大きい円を C_n と定義するので, 円と放物線が接するときを考えます．このとき, y 軸に関する対称性より, x を消去してできる y についての 2 次方程式が重解を持てば, 接することが言えます．(2) は, 一般化して漸化式を導く問題なので, 判別式で処理すれば求められます．$b_{n-1} > 0$ であることを述べるのを忘れないようにしましょう．(3) は, $b_n = a_n - a_{n-1}$ という関係式を用いて数列 $\{b_n\}$ に関する漸化式を導いています．一見根号を含む漸化式なので, 見たことないと感じるかもしれませんが, $c_n = \sqrt{b_n}$ と置いてしまえば, 数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることがわかります．このように見た目に騙されることなく本質を見抜くために置き換えは重要な計算手法となります．