14 （'89　奈良県立医科大） **【難易度】** … やや難

(1)　$a>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ が成り立つことを示せ．

(2)　関数 $f(x)=xe^{-x}$ を k 回微分して得られる関数 $f^{(k)}(x)$ が 0 となるような x の値を a_k とする．a_k を求めよ．ただし，$k=1,2,\cdots\cdots$ である．

(3)　$S(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{n-\sum_{k=1}^{n}S(a_k)\right\}$ を求めよ．

(4)　$y=S(x)$ で表される関数の逆関数を $x=S^{-1}(y)$ と表すとき，$\displaystyle\lim_{b\to1-0}\int_0^b S^{-1}(y)\,dy$ を求めよ．

【テーマ】：定積分と極限

方針

(1) では，$h>0$ として，$a=1+h$ とおき，二項定理を活用します．

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**　$a>1$ のとき，$h>0$ として，$a=1+h$ とおくと，

$$a^n=(1+h)^n=1+{}_nC_1h+{}_nC_2h^2+\cdots\cdots+h^n>{}_nC_2h^2$$

したがって，

$$0<\frac{n}{a^n}<\frac{n}{{}_nC_2h^2}=\frac{2n}{n(n-1)h^2}=\frac{2}{(n-1)h^2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)h^2}=0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$$

が成り立つ．ゆえに，示された．　**（証明終）**

(2)　$f(x)=xe^{-x}$ より，

$$f'(x)=-(x-1)e^{-x},\quad f''(x)=(x-2)e^{-x}$$

となるので，$f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{-x}$ と推定できる．

$k=1$ のときは，成り立つので，ある k での成立を仮定して，

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=(-1)^ke^{-x}+(-1)^{k+1}(x-k)e^{-x}\\&=(-1)^{k+1}(x-k-1)e^{-x}\end{aligned}$$

より，$k+1$ のときも成り立つ．よって，数学的帰納法によりすべての自然数 k に対して，

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{-x}$$

が成り立つ．$f^{(k)}(x)=0$ を満たす x の値は，$e^{-x}\neq0$ であることから，$x=k$ である．

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_k=k}\cdots\cdots\text{(答)}$$

(3)
$$\begin{aligned}S(x)&=\int_0^x te^{-t}\,dt\\&=\Big[-te^{-t}-e^{-t}\Big]_0^x\\&=-(x+1)e^{-x}+1\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

(2) より，$S(a_k)=S(k)=-(k+1)e^{-k}+1$ であるから，

$$n-\sum_{k=1}^{n}S(a_k)=n+\sum_{k=1}^{n}(k+1)e^{-k}-n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)e^{-k}$$

$T_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)e^{-k}$ とおくと，

$$T_n=2e^{-1}+3e^{-2}+\cdots\cdots+(n+1)e^{-n}$$
$$e^{-1}T_n=\qquad 2e^{-2}+\cdots\cdots+ne^{-n}+(n+1)e^{-n-1}$$

辺々引くと，

$$(1-e^{-1})T_n=2e^{-1}+e^{-2}+\cdots\cdots+e^{-n}-(n+1)e^{-n-1}$$
$$\frac{e-1}{e}T_n=\frac{1}{e}+\frac{\frac{1}{e}\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{e}}-\frac{n+1}{e^{n+1}}$$
$$T_n=\frac{1}{e-1}+\frac{e\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}}{(e-1)^2}-\frac{e}{e-1}\cdot\frac{n+1}{e^{n+1}}$$

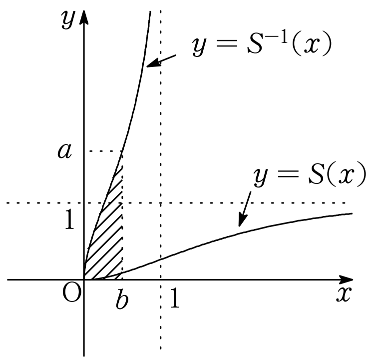
したがって，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\lim_{n\to\infty}T_n\\&=\frac{1}{e-1}+\frac{e}{(e-1)^2}\quad(\because\ (1))\\&=\boldsymbol{\frac{2e-1}{(e-1)^2}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

(4) ① より，

$$\lim_{x\to\infty}S(x)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x+1}{e^x}+1\right)=1$$

よって，$y=S(x)$ と $y=S^{-1}(x)$ のグラフは右図のようになる．



$S^{-1}(b)=a$ とすると，$b=S(a)=1-\frac{a+1}{e^a}$ であり，

$b\to1-0$ のとき，$a\to\infty$ である．よって，

$$\begin{aligned}\lim_{b\to1-0}\int_0^b S^{-1}(y)\,dy&=\lim_{b\to1-0}\int_0^b S^{-1}(x)\,dx\\&=\lim_{a\to\infty}\left\{ab-\int_0^a S(x)\,dx\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^a S(x)\,dx&=\int_0^a\{1-(x+1)e^{-x}\}\,dx\\&=\Big[\,x+(x+1)e^{-x}\,\Big]_0^a-\int_0^a e^{-x}\,dx\\&=a+(a+1)e^{-a}-1+e^{-a}-1\\&=(a+2)e^{-a}+a-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\lim_{b\to1-0}\{ab-(a+2)e^{-a}-(a-2)\}\\&=\lim_{a\to\infty}\left(2-\frac{a+2}{e^a}\right)\\&=\mathbf{2}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(1) の証明は，経験がないと難しく感じると思います．$a=1+h$ と分けて二項定理を使うことがポイントです．

(2) は，$f^{(k)}(x)$ が類推できるので，数学的帰納法で証明をすれば求められます．

(3) は，等差×等比の和タイプなので，公比倍して引きます．

(4) は，逆関数の積分なので，面積を利用して計算すれば求められます．