13 （'80 岐阜薬科大） **【難易度】** … 標準

整数 $p, q\ (q > 0)$ に対して，x の方程式 $x^2 - px - q = 0$ は有理数の解をもっている．このとき x の方程式 $x^2 - pqx - (q^3 + 1) = 0$ は有理数の解をもたないことを証明せよ．

【テーマ】：実数解を持つ条件

方針

方程式が有理数解を持つときは，判別式の値が平方数になります．

♣ ♠

解答

【証明】

$x^2 - px - q = 0$ の判別式を D_1 とすると，

$$D_1 = p^2 + 4q > 0$$

であり，有理数解を持つことから，D_1 は平方数となる．よって，自然数 n を用いて，

$$p^2 + 4q = n^2$$

と表せる．次に，$x^2 - pqx - (q^3 + 1) = 0$ の判別式を D_2 とすると，

$$\begin{aligned} D_2 &= p^2q^2 + 4(q^3 + 1) \\ &= q^2(p^2 + 4q) + 4 \\ &= q^2n^2 + 4 \end{aligned}$$

ここで，$x^2 - pqx - (q^3 + 1) = 0$ が有理数解を持つと仮定すると，
D_2 は平方数となるので，自然数 m を用いて，

$$q^2n^2 + 4 = m^2$$

と表せる．この式を変形すると，

$$m^2 - q^2n^2 = 4 \iff (m + qn)(m - qn) = 4$$

$m + qn, m - qn$ は整数で，$m + qn > m - qn$ より，

$$(m + qn, m - qn) = (4, 1)$$

となる．これより，$m = \dfrac{5}{2}$ となるので，m が自然数であることに矛盾する．

ゆえに，$x^2 - pqx - (q^3 + 1) = 0$ は，有理数の解を持たないことが示された． **（証明終）**

◇ ♡

解説

背理法を用いて証明しています．有理数を持つために最低限必要な条件すなわち必要条件をまず求めています．それが，判別式が平方数となることです．その最低限の条件を元に議論を進めていくと，最終的に矛盾が生じるので有理数解は存在しないという結論になります．