12 （'13　香川大） 【難易度】… |標準|

曲線 $C : y = \dfrac{\log x}{x}$ について，次の問いに答えよ．

（1） 曲線 C の概形をかけ．

（2） C の変曲点 P における，C の接線 ℓ の方程式を求めよ．

（3） ℓ と C は，P 以外に共有点をもたないことを示せ．

【テーマ】：曲線の凹凸とグラフ

方針

曲線 C の概形をかくので，第 2 次導関数まで計算をして増減表をかきます．(3) では，方程式を作り実数解が一つしかないことを証明しましょう．

解答

（1） $y' = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$ であり，

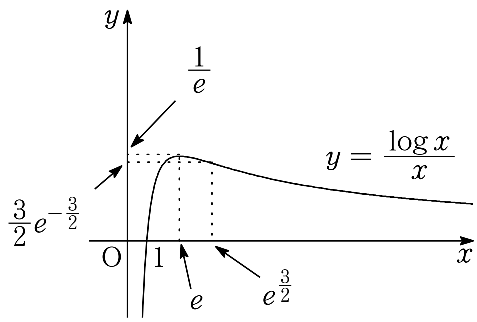
$$y'' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1 - \log x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\log x - 3}{x^3}$$

よって，$y' = 0$ のとき，$x = e$，$y'' = 0$ のとき，$x = e^{\frac{3}{2}}$ である．また，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0,\quad \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x} = -\infty$$

であるから，増減表とグラフは，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	(∞)
y'		$+$	0	$-$		$-$	
y''		$-$		$-$	0	$+$	
y	$(-\infty)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘	(0)



（2） $\mathrm{P}\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ より，直線 ℓ の方程式は，

$$y = \frac{1 - \log e^{\frac{3}{2}}}{\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2}\left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{2}}{e^3}\left(x - e^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-3}x + 2e^{-\frac{3}{2}}$$

である．

$$\therefore\quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}e^{-3}x + 2e^{-\frac{3}{2}}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

（3） **【証明】**

$\dfrac{\log x}{x} = -\dfrac{1}{2}e^{-3}x + 2e^{-\frac{3}{2}}$ が $x = e^{\frac{3}{2}}$ 以外の実数解をもたないことを示せばよい．

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}-\left(-\dfrac{1}{2}e^{-3}x+2e^{-\frac{3}{2}}\right)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}+\frac{1}{2}e^{-3}=\frac{1}{x^2}\left(1-\log x+\frac{1}{2}e^{-3}x^2\right)\ \cdots\cdots ①$$

$g(x)=1-\log x+\dfrac{1}{2}e^{-3}x^2$ とおくと，

$$g'(x)=-\frac{1}{x}+e^{-3}x=\frac{e^{-3}x^2-1}{x}$$

であり，$g'(x)=0$ のとき，$x=e^{\frac{3}{2}}$ であるから，増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$(+\infty)$	↘	0	↗

ゆえに，$x>0$ において，$g(x)\geqq 0$ となるので，① より，$f'(x)\geqq 0$ であり，等号が成立するのは，$x=e^{\frac{3}{2}}$ のときのみである．よって，$f(x)$ は単調増加で $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=0$ より，$f(x)=0$ の実数解は $x=e^{\frac{3}{2}}$ のみであることがわかるので，曲線 C と直線 ℓ は P 以外に共有点をもたないことが示された． **（証明終）**

◇ ♡

解説

(1), (2) は，基本問題なので完答しましょう．解答では，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ としていますが，これは，はさみうちの原理を用いて証明することができるので，一度は必ず自力で証明をしておきましょう．解答中に必要だと思えばその証明もつけておくと完璧です．ちなみに，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}$ は不定形ではないので，そのまま計算できます．

$$\frac{\log x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\log x$$

と分ければ，$x\to+0$ のとき，$\dfrac{1}{x}\to+\infty$，$\log x\to-\infty$ となるので，その積は $-\infty$ となります．

(3) は，C と ℓ が P 以外に共有点をもたないので，方程式を作り実数解がただ 1 つであることを示します．計算のポイントは，解答中にある $g(x)$ を新たに考えることです．$f'(x)$ の符号が確定すれば単調性がわかるので，題意は示せます．$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}+\dfrac{1}{2}e^{-3}$ をもう一度微分すると計算が大変なので，$\dfrac{1}{x^2}$ でくくり，確実に正となる部分は排除して残りの符号を考えるという方法を取っています．こうすることで分数の微分をしなくてよくなり計算もスッキリします．