10 （'13　九州大）　**【難易度】** … 標準

$a>1$ とし，2 つの曲線

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} & (x \geqq 0), \\ y=\dfrac{a^3}{x} & (x>0) \end{cases}$$

を順に C_1, C_2 とする．また，C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を ℓ_1 とする．以下の問いに答えよ．

（1）曲線 C_1 と y 軸および直線 ℓ_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ．

（2）点 P における C_2 の接線と直線 ℓ_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0<\theta(a)<\dfrac{\pi}{2}\right)$．このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$ を求めよ．

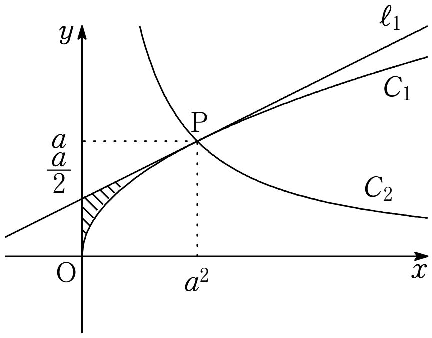
【テーマ】：関数の極限

方針

(1) は，y 軸方向に積分すると計算が楽になります．(2) は，接線の傾きを求めて tan の加法定理を利用します．

♣ ♠

解答



（1）C_1 と C_2 の交点の x 座標は，

$$\sqrt{x}=\frac{a^3}{x}$$

両辺を 2 乗して，

$$x=\frac{a^6}{x^2} \iff x^3=a^6$$

$$(x-a^2)(x^2+a^2x+a^4)=0$$

x は実数なので，$x=a^2$ である．よって，$\mathrm{P}(a^2,\ a)$ となる．
$y=\sqrt{x}$ に対して，$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ であるから，直線 ℓ_1 の方程式は，

$$y=\frac{1}{2a}(x-a^2)+a \iff y=\frac{1}{2a}x+\frac{a}{2}$$

となる．したがって，求める面積 S は，

$$\begin{aligned} S&=\int_0^a x\,dy-\frac{1}{2}\left(a-\frac{a}{2}\right)\cdot a^2 \\ &=\int_0^a y^2\,dy-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a^2 \\ &=\left[\ \frac{1}{3}y^3\ \right]_0^a-\frac{1}{4}a^3 \\ &=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^3 \\ &=\boldsymbol{\frac{1}{12}a^3} \cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

（2）$y=\dfrac{a^3}{x}$ に対して，$y'=-\dfrac{a^3}{x^2}$ であるから，C_2 の点 P における接線 ℓ_2 の方程式は，

$$y=-\frac{a^3}{a^4}(x-a^2)+a \iff y=-\frac{1}{a}x+2a$$

ℓ_1, ℓ_2 と x 軸の正の方向とのなす角をそれぞれ α, β とすると，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2a}$, $\tan\beta=-\dfrac{1}{a}$ であるから，

$$\begin{aligned}\tan\theta(a) &= \left|\tan(\alpha-\beta)\right| \\ &= \left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right| \\ &= \left|\frac{\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{a}}{1+\dfrac{1}{2a}\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)}\right| \\ &= \left|\frac{\dfrac{3}{2a}}{1-\dfrac{1}{2a^2}}\right| \\ &= \frac{3a}{2a^2-1} \quad (\because \quad a>1)\end{aligned}$$

ここで，$a \to \infty$ のとき，$\tan\theta(a) \to 0$ であり，$\theta(a) \to 0$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a) &= \lim_{a\to\infty} a\tan\theta(a)\cdot\cos\theta(a) \\ &= \lim_{a\to\infty}\frac{3a^2}{2a^2-1}\cdot\cos\theta(a) \\ &= \lim_{a\to\infty}\frac{3}{2-\dfrac{1}{a^2}}\cdot\cos\theta(a) \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

(1) は，グラフをかいて面積を考えると x 軸方向に積分するよりも y 軸方向に積分する方が計算が楽になることが分かります.

(2) は，2 直線のなす角なので，接線の傾きを求めて tan の加法定理を利用します．ただし，$0<\theta(a)<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\tan\theta(a)>0$ となります．安易に $\tan\theta(a)=\tan(\alpha-\beta)$ としないようにする必要があります．これは，α，β の値によって，$\tan\theta(a)$ の符号が変わる可能性があるからです．ここで，$\tan\theta=-\tan(\pi-\theta)$ が成り立つことから，なす角を考えるときは，$\left|\tan(\alpha-\beta)\right|$ とすると確実になす角が鋭角になります.