8 ('12 東京大) 【難易度】 … |標準|

実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O(0, 0), A(0, 1), B(1, 0), C(t, 0) を考える．また線分 AB 上の点 D を $\angle$ACO $=\angle$BCD となるように定める．t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．

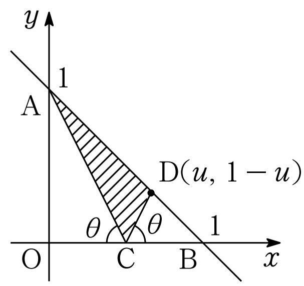
【テーマ】：三角関数の図形への応用

方針

△ACD の面積の最大値を求めるためには，△OAC と △BCD の面積がわかればよいので，点 D の座標を設定して，面積を求めます．

♣ ♠

解答



直線 AB の方程式は，$y=-x+1$ であるから，点 D の座標は，

$$\mathrm{D}(u,\,1-u)\quad(0<u<1)$$

とおける．よって，△OAC, △BCD の面積はそれぞれ，

$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}t,\quad \triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}(1-t)(1-u)\cdots\cdots①$$

と表すことができる．一方，$\angle$ACO $=\angle$BCD $=\theta$ とおくと，

$$\tan\theta=\frac{1}{t}$$

であるから，H(u, 0) とおくと，$\tan\theta=\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{CH}}$ である．したがって，

$$\frac{1}{t}=\frac{1-u}{u-t}\quad\Longleftrightarrow\quad u=\frac{2t}{1+t}$$

となる．これを ① へ代入すると，

$$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}(1-t)\left(1-\frac{2t}{1+t}\right)=\frac{(1-t)^2}{2(1+t)}$$

ゆえに，△ACD の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{OAB}-\triangle\mathrm{OAC}-\triangle\mathrm{BCD}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t-\frac{(1-t)^2}{2(1+t)}\\&=\frac{1}{2}\left\{1-t-\frac{(t-1)^2}{t+1}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{1-t-\frac{(t+1)(t-3)+4}{t+1}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(-2t+4-\frac{4}{t+1}\right)\\&=-t+2-\frac{2}{t+1}\quad\text{☞ 理系の人はここから微分してもよい．(別解参照)}\\&=-\left(t+1+\frac{2}{t+1}\right)+3\end{aligned}$$

ここで，$t+1>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$t+1+\frac{2}{t+1}\geqq 2\sqrt{(t+1)\cdot\frac{2}{t+1}}=2\sqrt{2}$$

等号は，$t+1=\dfrac{2}{t+1}$ かつ $0<t<1$ すなわち $t=-1+\sqrt{2}$ のとき，成立する．

よって，

$$-\left(t+1+\frac{2}{t+1}\right) \leqq -2\sqrt{2} \iff S \leqq 3-2\sqrt{2}$$

となるので，△ACD の面積の最大値は

$$\mathbf{3-2\sqrt{2} \quad (t=\sqrt{2}-1)\cdots\cdots(答)}$$

である．

◇ ♡

解説

点 D の座標を $\mathrm{D}(u,\ 1-u)$ とおけば，面積を $t,\ u$ を用いて表すことができます．あとは，$\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ を用いて t と u の関係式を導けば，面積が t のみで表せます．S は t に関する分数関数となるので，理系の人は微分して最大値を求めることもできます．文系の人は，分数式の最大値なので，有名不等式が使える形に式変形できるよう訓練を積んでおく必要があるでしょう．本問では，$S=-t+2-\dfrac{2}{t+1}$ なので，このまま相加平均・相乗平均の関係を用いることができません．なぜなら相加平均・相乗平均の関係は，$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つので，加えるもの同士が 0 以上でなければいけないからです．また，仮に 0 以上だったとしても最大値や最小値を求める場合は，加えるもの同士が逆数の関係になければ，右辺で積を計算したときに文字が消えません．そのため解答では，

$$S=-\left(t+1+\frac{2}{t+1}\right)+3$$

のように変形する必要があるのです．このように，逆数の関係を作ることが式変形のポイントとなります．

別解

S の最大値を微分を用いて求める方法です．（理系用の解答です）

$S=-t+2-\dfrac{2}{t+1}$ より，t で微分すると，

$$S'=-1+\frac{2}{(t+1)^2}$$

$S'=0$ のとき，$\dfrac{2}{(t+1)^2}=1$ すなわち $t=-1\pm\sqrt{2}$ であるから，$0<t<1$ で増減表をかくと，次のようになる．

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	

ここで，$t=-1+\sqrt{2}$ のとき，

$$S=-(\sqrt{2}-1)+2-\frac{2}{\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$$

となるので，求める S の最大値は

$$\mathbf{3-2\sqrt{2} \quad (t=\sqrt{2}-1)\cdots\cdots(答)}$$

である．