6 （'12　名古屋大） **【難易度】** … 標準

n を 2 以上の整数とする．1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある．ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする．この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す．この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする．次の問に答えよ．ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする．また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする．

(1)　$X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ．

(2)　$X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ．

(3)　$Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする．$P(s)$ を求めよ．

(4)　n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ．

【テーマ】：最大値・最小値の確率

方針

全事象は n^3 となるので，取り出すカードの場合の数を考えます．全事象は順列で考えているので，取り出すカードの場合の数も順列で考えます．

解答

(1)　3 回試行を行うとき，取り出すカードのすべての場合は n^3 通りある．このうち，最小値が k 以上で最大値が $j+k$ 以下となるのは，j 以上 $j+k$ 以下の $k+1$ 枚の中から重複を許して 3 枚を選べばよいので，$(k+1)^3$ 通りある．ゆえに，求める確率は，

$$\boldsymbol{\frac{(k+1)^3}{n^3}} \cdots\cdots (\textbf{答})$$

(2)　3 枚のカードの組合せを $\{a, b, c\}$ で表すこととするとき，$X = j, Y = j+k$ となるのは，次の 3 通りがある．

(i)　$\{j, j, j+k\}$

(ii)　$\{j, j+k, j+k\}$

(iii)　$\{j, b, j+k\}$　$(j < b < j+k)$

それぞれの取り出す順序を考えると，

(i) のとき　3 通り．

(ii) のとき　3 通り．

(iii) のとき　$3! = 6$ 通り．

があるので，求める確率は，

$$\frac{3+3+6(k-1)}{n^3} = \boldsymbol{\frac{6k}{n^3}} \cdots\cdots (\textbf{答})$$

(3) $Y-X=s$ となるのは,

$$(X, Y)=(1,\ s+1),\ (2,\ s+2),\ \cdots\cdots,\ (n-s,\ n)$$

の $n-s$ 通りがある．いずれの確率も (2) で $k=s$ としたものなので，求める確率は,

$$P(s)=\frac{6s}{n^3}\cdot(n-s)=\boldsymbol{\frac{6s(n-s)}{n^3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(4) (3) より，$P(s)$ は s についての 2 次関数となる．

$$\begin{aligned}P(s)&=\frac{6}{n^2}s-\frac{6}{n^3}s^2\\&=-\frac{6}{n^3}(s^2-ns)\\&=-\frac{6}{n^3}\left(s-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{3}{2n}\end{aligned}$$

$y=P(s)$ のグラフは上に凸の放物線であり，n は偶数であることから，$s=\frac{n}{2}$ のとき，$P(s)$ は最大値をとる．ゆえに，$P(s)$ を最大にする s の値は,

$$\boldsymbol{s=\frac{n}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

最大値・最小値を求める確率の問題です．問題は難しく見えますが，内容としては非常に標準的なものです．例えば最小値が j 以上といわれたら，j 以上 n 以下の $n-j+1$ 枚の中から 1 枚を選べばよいですし，最大値が $j+k$ 以下といわれたら，1 以上 $j+k$ 以下の $j+k$ 枚の中から 1 枚を選べばよいのです．(1) はその両方を同時にやっているので，k 以上 $j+k$ 以下の $k+1$ 枚の中から 1 枚を選びます．(2) では，$X=j, Y=j+k$ となっているので，最低 2 枚は 確定していますから，残り 1 枚が j なのか $j+k$ なのか $j,\ j+k$ 以外なのかで場合分けをする必要があります．重複を避けるためにも丁寧に場合分けをする方がミスがないでしょう．(3) では，(2) の結果が使えるかどうかがポイントとなります．また，(4) では n が偶数になっていますが，もしも n の条件がなければ場合分けをしなければいけません．n が奇数のときは $s=\frac{n}{2}$ は整数とならないため $P(s)$ は $s=\frac{n}{2}$ で最大値をとらないからです．n が奇数の場合は，$\frac{n}{2}$ に最も近い整数すなわち $s=\frac{n-1}{2},\ \frac{n+1}{2}$ で最大値をとります．