**2** （'98　岡山大） **【難易度】** … 標準

複素平面上で

$$z_0 = 2(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right),\quad z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0,\quad z_2 = -\frac{1}{z_0}$$

を表す点をそれぞれ $P_0, P_1, P_2$ とする.

（1） $z_1$ を極形式で表せ.

（2） $z_2$ を極形式で表せ.

（3） 原点 O, $P_0, P_1, P_2$ の 4 点が同一円周上にあるときの $z_0$ の値を求めよ.

**【テーマ】：複素数の基本計算**

**方針**

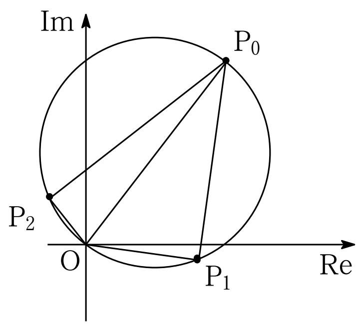
(1), (2) は極形式の基本的な性質から求められます. (3) は, 図形的な意味を考えながら円を見つけましょう.

♣ ♠

**解答**

（1）

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_0 \\ &= \frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\cdot 2(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \boldsymbol{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)} \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$




（2）

$$\begin{aligned} z_2 &= (-1 + i\cdot 0)\cdot\frac{1}{z_0} \\ &= (\cos\pi + i\sin\pi)\cdot\frac{1}{2}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\{\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)\}} \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

（3） $OP_0 = 2,\ OP_1 = 1$ であり,

$$\angle P_0OP_1 = \arg\left(\frac{z_0}{z_1}\right) = \theta - \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

である. したがって, $\angle OP_1P_0 = \dfrac{\pi}{2}$ であるから, $OP_0$ は 4 点 O, $P_0, P_1, P_2$ を通る円の直径となっている.

$$\angle P_0OP_2 = \arg\left(\frac{z_2}{z_0}\right) = (\pi - \theta) - \theta = \pi - 2\theta$$

であり, $\angle P_0P_2O = \dfrac{\pi}{2}$ であることから,

$$\cos(\pi - 2\theta) = \frac{OP_2}{OP_0} = \frac{1}{4}$$

である. したがって,

$$\cos 2\theta = -\frac{1}{4} \iff 2\cos^2\theta - 1 = -\frac{1}{4} \iff \cos^2\theta = \frac{3}{8}$$

よって,

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{4},\quad \sin\theta = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

であるから,

$$\boldsymbol{z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}i} \cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

(1), (2) は，極形式に関する基本的な問題です．(1) での偏角は，$\theta+\dfrac{5}{3}\pi$ でも問題ありません．これより，$\angle \mathrm{P_0OP_1}=\dfrac{\pi}{3}$ となることに気付きましょう．(3) では，その角と辺の比から直角三角形を見つけ出せるかどうかがポイントとなります．図を考えるときには特殊な状況が隠れていないかどうかのチェックができるようになっておくとよいですね．

**【極形式】**

複素数平面上の点 $z$ は，原点からの距離 $r$ とし，実軸の正の方向とのなす角を反時計回りに $\theta$ とすると，

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と表すことができる．これを複素数 $z$ の極形式といい，$\theta$ を偏角という．偏角 $\theta$ は，

$$\theta=\arg z$$

と表す．極形式には，次の性質がある．

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき，

（i） $z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \Longrightarrow \arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$

（ii） $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \Longrightarrow \arg\dfrac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$