1 （′14　神戸大） **【難易度】** … 標準

2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解を α, β とし，

$$c_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) n を 2 以上の自然数とするとき，

$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$$

となることを示せ．

(2) 曲線 $y = c_1x^3 - c_3x^2 - c_2x + c_4$ の極値を求めよ．

(3) 曲線 $y = c_1x^2 - c_3x + c_2$ と，x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

(1) は，α, β が 2 次方程式の解であることを利用して式を導くことができます．(2), (3) は，(1) で求めた漸化式から c_1, c_2, c_3, c_4 の値を求めることができるので，後は微分と積分を利用します．

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

$x^2 - x - 1 = 0$ の 2 解が α, β であるから，

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \quad \cdots\cdots \quad ①$$
$$\beta^2 - \beta - 1 = 0 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

を満たす．$① \times \alpha^{n-1} + ② \times \beta^{n-1}$ より，

$$\alpha^{n+1} - \alpha^n - \alpha^{n-1} = 0$$
$$\beta^{n+1} - \beta^n - \beta^{n-1} = 0$$

辺々を加えると，

$$\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - (\alpha^n + \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) = 0$$
$$c_{n+1} - c_n - c_{n-1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$$

となり，示された． **（証明終）**

(2) 解と係数の関係より，$\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ であるから，

$$c_1 = \alpha + \beta = 1$$
$$c_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3$$
$$c_3 = c_2 + c_1 = 4$$
$$c_4 = c_3 + c_2 = 7$$

であるから，与えられた曲線を表す方程式は，$y = x^3 - 4x^2 - 3x + 7$ となる．

$$y' = 3x^2 - 8x - 3 = (3x + 1)(x - 3)$$

より，$y' = 0$ のとき，$x = -\frac{1}{3}, 3$ である．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{203}{27}$	$\searrow$	-11	$\nearrow$

$$\begin{aligned} &x = -\frac{1}{3} \text{ のとき，} \quad y = -\frac{1}{27} - \frac{4}{9} + 1 + 7 = \frac{203}{27} \\ &x = 3 \text{ のとき，} \quad y = 27 - 36 - 9 + 7 = -11 \end{aligned}$$

よって，極大値と極小値は，

$$\begin{cases} \textbf{極大値：}\boldsymbol{\frac{203}{27}} \quad \boldsymbol{\left(x = -\frac{1}{3}\right)} \\ \textbf{極小値：}\boldsymbol{-11} \quad \boldsymbol{(x = 3)} \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

(3) (2) から，与えられた曲線を表す方程式は，$y = x^2 - 4x + 3$ となる．x 軸との交点の x 座標は，

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x-3)(x-1) = 0$$

であるから $x = 1, 3$ である．よって，求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{-(x^2 - 4x + 3)\}\,dx \\ &= -\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(3-1)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}} \cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

である．

◇ ♡

解説

様々な分野が融合している問題ですが，どれも基本的なものです．ただ，(1) は様々な解答方法があるので，(1) の出来具合が大きく得点を左右しそうです．本解は，方程式の解を利用しました．この方法は，3 次式などになっても有効な方法なので，応用が効きます．(2), (3) は微分積分の基本問題なので，確実にとりたい問題です．