45 ('09 旭川医科大) 【難易度】… 標準

$f_n(x) = \cos^n x \ \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ n = 1, 2, \cdots\right)$ とし，曲線 $y = f_n(x)$ 上の点 P における接線と y 軸との交点を Q とする．点 Q の y 座標を最大にする点 P の x 座標を a_n とし，そのときの点 Q の y 座標を b_n とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\sin a_n$，$\cos a_n$ をそれぞれ n を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

【テーマ】：数列の極限

方針

点 P の x 座標を t として，点 P における接線と y 軸との交点を求めます．t を変数として点 Q の y 座標のとり得る値の範囲を求めます．

♣ ♠

解答

(1) 点 P の x 座標を t とする．$f_n'(x) = n\cos^{n-1}x(-\sin x)$ であるから，点 P における接線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= -n\cos^{n-1}t\sin t(x-t) + \cos^n t \\ &= -(n\cos^{n-1}t\sin t)x + nt\cos^{n-1}t\sin t + \cos^n t \end{aligned}$$

よって，点 Q の y 座標は，

$$y = nt\cos^{n-1}t\sin t + \cos^n t$$

である．

$$\begin{aligned} y' &= n\cos^{n-1}t\sin t + nt(n-1)\cos^{n-2}t(-\sin t)\sin t + nt\cos^n t + n\cos^{n-1}t(-\sin t) \\ &= n\cos^{n-1}t\sin t - n(n-1)t\cos^{n-2}t(1-\cos^2 t) + nt\cos^n t - n\cos^{n-1}t\sin t \\ &= -n(n-1)t\cos^{n-2}t + n(n-1)t\cos^n t + nt\cos^n t \\ &= -n(n-1)t\cos^{n-2}t + n^2 t\cos^n t \\ &= -nt\cos^{n-2}t(n-1-n\cos^2 t) \end{aligned}$$

より，$y' = 0$ のとき，$t \neq 0,\ \cos t \neq 0$ なので，$\cos t = \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$ … ① である．

$0 < \sqrt{\dfrac{n-1}{n}} < 1$ より，① を満たす t が $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ でただ 1 つ存在する．この t の値を α_n とすると，増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	α_n	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

よって，$t = \alpha_n$ のとき，最大値をとるので，$a_n = \alpha_n$ である．したがって，

$$\cos a_n = \sqrt{\boldsymbol{\frac{n-1}{n}}} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

このとき，$\sin a_n > 0$ より，

$$\sin a_n = \sqrt{1-\cos^2 a_n} = \sqrt{1-\frac{n-1}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より，

$$\begin{aligned} b_n &= na_n\cos^{n-1}a_n\sin a_n + \cos^n a_n \\ &= na_n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \sqrt{n}a_n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{a_n}{\sin a_n}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$n \to \infty$ のとき，$a_n \to 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sin a_n} = \lim_{a_n\to 0}\frac{a_n}{\sin a_n} = 1$$

であり，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$ より，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1\cdot e^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 + e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

解説

(1) は，接線の y 座標が最大となるような接点 P の x 座標の正弦と余弦を求める問題です．a_n は具体的に求めることはできないので，$y' = 0$ となるような実数 t がただ 1 つあることを述べておいて，文字で代用する方法をとります．ポイントは，$y' = 0$ を満たす実数 t がただ 1 つしかないことをきちんと記述しておくことです．三角関数なので，1 つの正弦・余弦の値に対して角度は複数あるからです．ここでは，t の値の範囲からただ 1 つであることが分かります．それさえ分かれば，増減表がかけるので $t = \alpha_n$ で最大値をとることが分かります．

(2) は，数列の極限の問題です．三角関数の極限と，自然対数の底 e に関する極限なので，不慣れな人は式変形で戸惑うかもしれません．式変形がきちんとできるように演習を積んでおきましょう．

【自然対数の底に関する極限】

(i) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$　　(ii) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$　　(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

これらの公式は，置き換えを行うことで同値であることが証明できる．