44 ('12 大阪市立大) 【難易度】… 標準

実数 θ に対し，座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(\cos\theta, \sin\theta, 0)$，$\mathrm{B}(0, \sin 2\theta, \cos 2\theta)$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) 点 A, B と原点 O の 3 点は同一直線上にないことを示せ.

(2) 三角形 OAB の面積 S を $\sin\theta$ を用いて表せ.

(3) θ が実数全体を動くとき，(2) で求めた S の最大値と最小値を求めよ.

【テーマ】：最大値・最小値

方針

(1) は $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 k が存在しないことを示します．(2) は，ベクトルを用いた三角形の面積公式を利用します．(3) は，$t = \sin\theta$ と置いて，t の 6 次関数の最大値・最小値を考えます．

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

3 点 O, A, B が一直線上にあると仮定すると，0 でない実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}} \iff (\cos\theta, \sin\theta, 0) = k(0, \sin 2\theta, \cos 2\theta)$$

と表すことができる．各成分を比較して，

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = k\sin 2\theta \\ 0 = k\cos 2\theta \end{cases}$$

$k \neq 0$ であるから，$\cos 2\theta = 0$ となり，

$$\cos 2\theta = 0 \iff 2\cos^2\theta - 1 = 0$$

と $\cos\theta = 0$ より，これらを満たす θ は存在しない．ゆえに，実数 k は存在しないので，3 点 O, A, B は一直線上にないことが示された． **(証明終)**

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \sin\theta\sin 2\theta$ であるから，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1-(\sin\theta\sin 2\theta)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1-4\sin^4\theta\cos^2\theta} \qquad (\because\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1-4\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{4\sin^6\theta - 4\sin^4\theta + 1}} \cdots\cdots \textbf{(答)} \end{aligned}$$

(3) $\sin\theta = t$ とおくと，θ が実数全体を動くので，$-1 \leqq t \leqq 1$ である．したがって，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{4t^6 - 4t^4 + 1} \cdots\cdots ①$$

である．$f(t) = 4t^6 - 4t^4 + 1$ とおくと，

$$f'(t) = 24t^5 - 16t^3 = 8t^3(3t^2 - 2)$$

となるので，$f'(t)=0$ のとき，$t=0,\ \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ である．$y=f(t)$ は偶関数であるから $0 \leqq t \leqq 1$ で考えると，増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\dfrac{11}{27}$	$\nearrow$	1

よって，$f(t)$ の最大値・最小値は，

$$\begin{cases} \text{最大値} & 1 \\ \text{最小値} & \dfrac{11}{27} \end{cases}$$

であるから，S の最大値・最小値は，① より，

$$\begin{cases} \textbf{最大値} & \boldsymbol{\dfrac{1}{2}} \\ \textbf{最小値} & \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{33}}{18}} \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

解説

(1) は，背理法で示していますが，(3) で $\triangle$OAB の面積が 0 になることがないことからも 3 点 O, A, B が一直線上にないことがわかります．(2) では，空間図形なので，ベクトルを用いた三角形の面積公式が有効活用できます．(3) では，$\sqrt{}$ 内を取り出して，$t=\sin\theta$ と置き，6 次関数の最大値・最小値を考えます．なお，最大値・最小値をとるときの θ の値は求めることができないので，求める必要はありません．