42 ('02　山口大)　【難易度】 … 標準

原点を O とする座標空間に 3 点 A(2, 0, 0), B(0, 3, 1), C(1, 1, 2) をとり，方程式 $z=-1$ で表される平面を α とする．$t>2$ とするとき，点 P(2, 1, t) を考える．4 つの直線 PO, PA, PB, PC と平面 α との交点をそれぞれ D, E, F, G とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, t を用いて表せ．

(2) 点 G が △DEF の周または内部にあるように，t の値の範囲を定めよ．

【テーマ】：空間ベクトルと点の存在範囲

方針

(1) は，ベクトル方程式を考えて平面 $z=-1$ との交点を求めます．(2) は (1) の結果を用いて，点が三角形の周および内部にある条件を利用して t の範囲を求めます．

♣ ♠

解答

(1) 直線 PO, PA, PB, PC 上の任意の点をそれぞれ W, X, Y, Z とすると，直線 PO, PA, PB, PC のベクトル方程式は，実数 k_1, k_2, k_3, k_4 を用いて次のように表せる．

直線 PO ： $\overrightarrow{\mathrm{OW}}=k_1\overrightarrow{\mathrm{PO}}$

直線 PA ： $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k_2\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

直線 PB ： $\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k_3\overrightarrow{\mathrm{BP}}$

直線 PC ： $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k_4\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

成分で表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OW}}=(2k_1,\ k_1,\ k_1t)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(2,\ k_2,\ k_2t)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=(2k_3,\ 3-2k_3,\ 1+k_3(t-1))$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=(1+k_4,\ 1,\ 2+k_4(t-2))$$

となり，これらの直線と平面 $z=-1$ との交点がそれぞれ D, E, F, G であるから，z 成分を -1 とすれば，

$$k_1=-\frac{1}{t},\quad k_2=-\frac{1}{t},\quad k_3=-\frac{2}{t-1},\quad k_4=-\frac{3}{t-2}$$

である．ゆえに，点 D, E, F, G の座標は，

$$\mathrm{D}\left(-\frac{2}{t},\ -\frac{1}{t},\ -1\right),\ \mathrm{E}\left(2,\ -\frac{1}{t},\ -1\right),\ \mathrm{F}\left(-\frac{4}{t-1},\ \frac{3t+1}{t-1},\ -1\right),\ \mathrm{G}\left(\frac{t-5}{t-2},\ 1,\ -1\right)$$

である．よって，$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=p\overrightarrow{\mathrm{ED}}+q\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ とおくと，これを成分表示して，

$$\left(\frac{t-5}{t-2}-2,\ 1+\frac{1}{t},\ 0\right)=p\left(-\frac{2}{t}-2,\ 0,\ 0\right)+q\left(\frac{-4}{t-1}-2,\ \frac{3t+1}{t-1}+\frac{1}{t},\ 0\right)$$

となる．ゆえに，成分を比較すると，

$$\begin{cases}\dfrac{t-5}{t-2}-2=\left(-\dfrac{2}{t}-2\right)p+\left(\dfrac{-4}{t-1}-2\right)q\\ 1+\dfrac{1}{t}=\left(\dfrac{3t+1}{t-1}+\dfrac{1}{t}\right)q\end{cases}$$

となる．これを解くと，

$$p=\frac{t(t+3)}{2(3t-1)(t-2)},\quad q=\frac{t-1}{3t-1}$$

となる．したがって，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\frac{t(t+3)}{2(3t-1)(t-2)}\overrightarrow{\mathrm{ED}}+\frac{t-1}{3t-1}\overrightarrow{\mathrm{EF}}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) $t>2$ であることから，$p>0,\ q>0$ である．よって，点 G が △DEF の周または内部にあるための条件は，

$$p+q\leqq 1$$

である．したがって，

$$\frac{t(t+3)}{2(3t-1)(t-2)}+\frac{t-1}{3t-1}\leqq 1$$

$t>2$ であるから，両辺に $2(3t-1)(t-2)>0$ をかけると，

$$t(t+3)+2(t-2)(t-1)\leqq 2(3t-1)(t-2)\quad\Longleftrightarrow\quad t(3t-11)\geqq 0$$

$t>2$ より，求める t の値の範囲は，

$$\boldsymbol{t\geqq\frac{11}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

文字計算なので，計算量が多く計算力が要求されています．(1) では，点 D, E, F, G の座標をどのようにして考えるかがポイントになりますが，空間座標で考えているので，ベクトル方程式を用いるのがよいでしょう．そうすれば，平面 $z=-1$ との交点を求めたいので，z 座標を -1 にすればよいですし，もしもこの平面が，$x+y+z=1$ などとなっていても，これに代入をして $k_i(i=1,2,3,4)$ の値を求めればよいので，応用がききます．(2) では，点が三角形の周および内部にあるための条件なので，次の基本事項 (iii) を用います．

【ベクトルの終点の存在範囲】

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする．

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とする．また，s，t を実数の変数とする．s，t に条件があると，次のような図形を表す．

(i)	**直線** AB	$s+t=1$
(ii)	**線分** AB	$s+t=1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$
(iii)	△OAB **の周および内部**	$s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$
(iv)	OA, OB **を** 2 **辺とする平行四辺形** OACB **の周および内部**	$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$