41 （′02　徳島大・改） 【難易度】 … やや難

n を自然数，a を正の実数とし，曲線 $C : y = \dfrac{1}{a}x^{n+1} - x$ を考える．次の問いに答えよ．

(1)　曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積が $\dfrac{1}{2}$ となるとき，a を n を用いて表せ．

(2)　(1) で求めた a を第 n 項 a_n とする数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ を考える．$b_n = a_{2n}$ で定義される数列 $\{b_n\}$ および $c_n = a_{2n-1}$ で定義される数列 $\{c_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ．

【テーマ】：面積と極限

方針

(1) では，n の偶奇によって $y = 0$ となる x の値が異なるので，場合分けを行います．(2) では，極限値を求める際に，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ を用います．

♣ ♠

解答

(1)　$y = \dfrac{1}{a}x(x^n - a)$ である．

(i)　n が奇数のとき，$y = 0$ となる x の値は，$x = 0$, $\sqrt[n]{a}$ であるから，曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると，$0 < x < \sqrt[n]{a}$ において $y < 0$ であることに注意して，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\sqrt[n]{a}} \left(-\frac{1}{a}x^{n+1} + x\right) dx \\
&= -\frac{1}{a}\int_0^{\sqrt[n]{a}} (x^{n+1} - ax)\, dx \\
&= -\frac{1}{a}\left[\frac{1}{n+2}x^{n+2} - \frac{a}{2}x^2\right]_0^{\sqrt[n]{a}} \\
&= -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{n+2}a^{\frac{n+2}{n}} - \frac{a}{2}a^{\frac{2}{n}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)a^{\frac{2}{n}} \\
&= \frac{n}{2(n+2)}a^{\frac{2}{n}}
\end{aligned}
$$

である．$S = \dfrac{1}{2}$ より，

$$
\frac{1}{2} = \frac{n}{2(n+2)}a^{\frac{2}{n}} \iff a = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}
$$

である．

(ii)　n が偶数のとき，$y = 0$ となる x の値は，$x = 0$, $\pm\sqrt[n]{a}$ であり，曲線 C は y 軸に関して対称であるから，曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を T とすると，

$$
T = 2S = \frac{n}{n+2}a^{\frac{2}{n}} \quad (\because \text{(i)})
$$

である．$T = \dfrac{1}{2}$ より，

$$
\frac{1}{2} = \frac{n}{n+2}a^{\frac{2}{n}} \iff a = \left(\frac{n+2}{2n}\right)^{\frac{n}{2}}
$$

である．

以上より，求める a の値は，

$$\boldsymbol{a} = \begin{cases} \left(\dfrac{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\frac{\boldsymbol{n}}{2}} & \textbf{（}\boldsymbol{n}\ \textbf{が奇数のとき）} \\ \left(\dfrac{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{2n}}\right)^{\frac{\boldsymbol{n}}{2}} & \textbf{（}\boldsymbol{n}\ \textbf{が偶数のとき）} \end{cases} \cdots\cdots\textbf{（答）}$$

（2）（1）より，

$$a_n = \begin{cases} \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} & （n\ \text{が奇数のとき}） \\ \left(\dfrac{n+2}{2n}\right)^{\frac{n}{2}} & （n\ \text{が偶数のとき}） \end{cases}$$

であるから，

$$b_n = a_{2n} = \left(\frac{2n+2}{2\cdot 2n}\right)^{\frac{2n}{2}} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$$

したがって，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \mathbf{0}\cdots\cdots\textbf{（答）} \end{aligned}$$

また，

$$c_n = a_{2n-1} = \left(\frac{2n-1+2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1+2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{2}}\right)^{\frac{2n-1}{2}} \\ &= \boldsymbol{e}\cdots\cdots\textbf{（答）} \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

（1）は，面積を計算する問題ですが，曲線 C と x 軸との位置関係が分かればよいので，微分をしてきちんとしたグラフを考える必要はありません．解答では，$0 < x < \sqrt[n]{a}$ において $y < 0$ であると一言述べています．n の偶奇による場合分けに気付けるかどうかがポイントです．（2）は，極限の計算なので，次の自然対数の底に関する極限を利用します．

【自然対数の底に関する極限】

（i）$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$　　（ii）$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

（iii）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$　　（iv）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

これらの公式は，置き換えを行うことで同値であることが証明できる．