39 （$'13$ 横浜国立大） **【難易度】** … やや難

r を正の実数とする．xy 平面上の点 $\mathrm{A}(0,\ r)$ を中心とする半径 r の円を C とする．点 $\mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{2}{r+2}\right)$ から C に傾きが正の接線を引き，接点を P とする．r がすべての正の実数を動くとき，P の軌跡を図示せよ．

【テーマ】：軌跡

方針

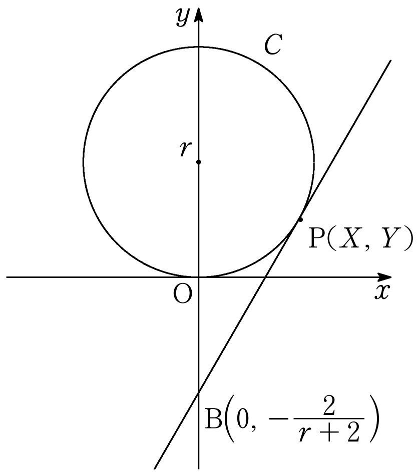
軌跡を求める点 P の座標を $(X,\ Y)$ とおいて，$X,\ Y$ の関係式を導きます．点 P における接線が点 B を通るという条件を用います．

♣ ♠

解答

円 C の方程式は，$x^2+(y-r)^2=r^2$ であるから，点 P の座標を $(X,\ Y)$ とおくと，

$$X^2+(Y-r)^2=r^2 \cdots\cdots ①$$



を満たす．点 P における円の接線の方程式は，

$$Xx+(Y-r)(y-r)=r^2$$

であるから，これが点 B を通るとき，

$$(Y-r)\left(-\frac{2}{r+2}-r\right)=r^2$$

$$(Y-r)\left(-\frac{r^2+2r+2}{r+2}\right)=r^2$$

$r^2+2r+2 \neq 0$ であるから，

$$Y-r=r^2\left(-\frac{r+2}{r^2+2r+2}\right)$$

$$Y=r-\frac{r^3+2r^2}{r^2+2r+2}=\frac{2r}{r^2+2r+2}$$

また，① より，

$$\begin{aligned} X^2&=r^2-(Y-r)^2\\ &=\{r+(Y-r)\}\{r-(Y-r)\}\\ &=Y(2r-Y)\cdots\cdots ②\\ &=\frac{2r}{r^2+2r+2}\left(2r-\frac{2r}{r^2+2r+2}\right)\\ &=\frac{2r}{r^2+2r+2}\cdot\frac{2r(r+1)^2}{r^2+2r+2}\\ &=\left\{\frac{2r(r+1)}{r^2+2r+2}\right\}^2 \end{aligned}$$

$X>0,\ r>0$ より，$X=\dfrac{2r(r+1)}{r^2+2r+2}$ である．ゆえに，点 P の座標を r を用いて表すと，

$$\mathrm{P}\left(\frac{2r(r+1)}{r^2+2r+2},\ \ \frac{2r}{r^2+2r+2}\right)$$

となるので，これより r を消去すればよい．$X=(r+1)Y$ であるから，

$$X=rY+Y \iff rY=X-Y$$

となる．よって，これを ② へ代入すると，

$$X^2 = 2rY - Y^2 \iff X^2 = 2(X - Y) - Y^2 \iff (X-1)^2 + (Y+1)^2 = 2$$

を得る．$Y > 0$ より，$Y + 1 > 1$ であるから，

$$2 - (X-1)^2 > 1 \iff 0 < X < 2$$

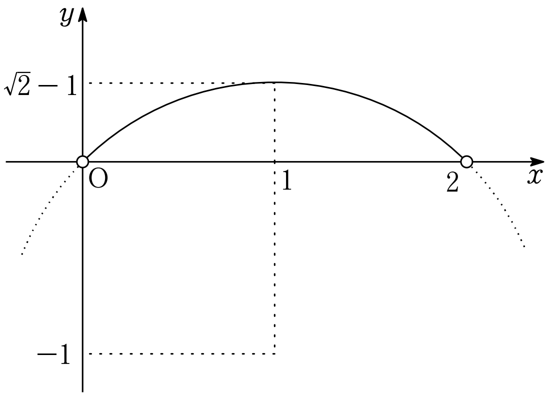
である．このとき，$0 \leqq 2 - (Y+1)^2 < 1$ であるから，

$$0 < Y \leqq \sqrt{2} - 1$$

である．よって，点 P の軌跡は，

$$\text{円}:(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \quad (0 < x < 2,\ 0 < y \leqq \sqrt{2} - 1)$$

であり，これを図示すると下図のようになる．ただし，白丸は含まない．



◇ ♡

解説

方針は立てやすい問題ですが，文字計算が大変なので計算間違いをしないようにしなければいけません．r を消去する方法は様々ですができるだけ簡潔に計算をしなければミスする可能性が大きくなります．また，計算途中に文字式での割り算があるので，0 か 0 でないかの吟味も忘れずにしなければ減点されてしまいます．$r^2 + 2r + 2 \neq 0$ としたのは，

$$r^2 + 2r + 2 = (r+1)^2 + 1 > 0$$

だからです．また，最後に定義域などを調べる（いわゆる軌跡の限界）ことを忘れないようにしましょう．