38 （'86　横浜市立大） 【難易度】… 標準

2×2 行列 A, B が次の条件を満たすとする．

㋐ $A \neq B$ とする．

㋑ A, B はともに単位行列ではない．

㋒ A^2, B^2, $(AB)^2$ はすべて単位行列である．

このとき，次の問いに答えよ．

（1） $AB = BA$ を示せ．

（2） $A + B$ は逆行列をもたないことを示せ．

（3） $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，A を求めよ．

【テーマ】：行列と数列

方針

(1) は 条件 ㋒ を用います．(2) は $(A+B)^{-1}$ が存在すると仮定して矛盾を導きます．(3) は，(1) の結果と条件 ㋐, ㋑ を用いましょう．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

$(AB)^2 = E \iff ABAB = E$

右から B をかけると，

$$ABAB^2 = B \iff ABA = B \quad (\because \ B^2 = E)$$

さらに右から A をかけると，

$$ABA^2 = BA \iff AB = BA \quad (\because \ A^2 = E)$$

よって，示された． **(証明終)**

（2） **【証明】**

(1) の結果より，$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ であるから，

$$A^2 - B^2 = O \quad (\because \ A^2 = B^2 = E)$$

$$\therefore \quad (A+B)(A-B) = O$$

ここで，$(A+B)^{-1}$ が存在すると仮定すると，この式の両辺に左から $(A+B)^{-1}$ をかけて，

$$A - B = O \iff A = B$$

となり，条件 ㋐ に矛盾する．ゆえに，$A + B$ の逆行列は存在しない． **(証明終)**

（3） $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，$AB = BA$ より，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \ a=d,\quad b=c$$

このとき，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ となり，$A^2=E$ より，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \ \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ 2ab=0 \end{cases}$$

これより，

$$\therefore\ \ \begin{cases} a+b=\pm 1 \\ ab=0 \end{cases}$$

となるので，

$b=0$ のとき，$a=\pm 1$

$a=0$ のとき，$b=\pm 1$

である．条件 (ア), (イ) より，

$$(a,\,b)=(1,\,0),\,(a,\,b)=(0,\,1)$$

は不適である．ゆえに，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

（1）は，与えれたどの条件を使うかで悩むでしょうが，いろいろと式変形をして探し当てるしかありません．ポイントは，等式を示すので等式を利用してみるということつまり，(ウ) が有力です．しかも A と B がないといけないので，必然的にどれを使えばよいかは絞れてくるでしょう．

（2）は，逆行列をもたないことを示すので，逆行列をもつと仮定して矛盾を導く方針が自然でしょう．

（3）は，行列 B の成分が与えられているので，成分計算をする方針が自然と思いつきます．（1）の結果を用いれば 2 文字の連立方程式になるので，成分計算といってもそれほど計算量は多くありません．