37 （′07　東北大） **【難易度】** … やや難

n を 2 以上の自然数とし，整式 x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りを a_nx+b_n とする．

（1） a_2, b_2 を求めよ．

（2） a_{n+1}, b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ．

（3） 各 n に対して，a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ．

【テーマ】：連立漸化式

方針

(1) は，x^2 を $x^2-6x-12$ で割ったときの余りを求めます．(2) は漸化式を導くので，(1) と同様に作った x^n の式において x^{n+1} を作るために，両辺を x 倍します．(3) は，まず a_n, b_n が 6 の倍数であることを示して，素数の性質を利用し示します．

♣ ♠

解答

（1） x^2 を $x^2-6x-12$ で割ったときの余りは，

$$x^2=(x^2-6x-12)+6x+12$$

より，$6x+12$ である．したがって，

$$\boldsymbol{a_2=6,\ b_2=12}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2） x^n を $x^2-6x-12$ で割った商を $Q_n(x)$ とすると，

$$x^n=(x^2-6x-12)Q_n(x)+a_nx+b_n$$

よって，

$$\begin{aligned} x^{n+1}&=x(x^2-6x-12)Q_n(x)+a_nx^2+b_nx \\ &=x(x^2-6x-12)Q_n(x)+a_n(x^2-6x-12)+(6a_n+b_n)x+12a_n \end{aligned}$$

より，

$$\left\{\begin{array}{ll} \boldsymbol{a_{n+1}=6a_n+b_n} & \cdots\cdots\ ① \\ \boldsymbol{b_{n+1}=12a_n} & \cdots\cdots\ ② \end{array}\right.\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（3） $n=2$ のとき，$a_2=6, b_2=12$ であるから，a_2, b_2 は 6 の倍数である．ゆえに，①, ② から帰納的に a_n, b_n は 6 の倍数であることがわかる．

ここで，$n \geqq 3$ のとき，公約数の中で 2, 3 以外の素数 p が存在すると仮定すると，② より，

$$\begin{aligned} b_n&=12a_{n-1} \\ &=2^2\cdot 3a_{n-1} \end{aligned}$$

であるから，a_{n-1} は p の倍数となる．よって，① より，

$$b_{n-1}=a_n-6a_{n-1}$$

となり，a_n, a_{n-1} が p の倍数となるので，b_{n-1} は p の倍数である．これを繰り返すと，a_2, b_2 も p の倍数と

なるが,

$$a_2 = 2\cdot 3,\quad b_2 = 2^2\cdot 3$$

となるので,矛盾する.

ゆえに,a_n と b_n の公約数で素数となるのは,

2 と 3……(答)

である.

◇ ♡

解説

(1) は,具体的に $n=2$ を代入して x^2 を $x^2-6x-12$ で割った余りを求めますが,わざわざ筆算をしなくても次数が同じなので,余りは式変形だけで求められます.

(2) は,漸化式を導く問題ですが,x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りは a_nx+b_n と与えられているので,x^{n+1} を $x^2-6x-12$ で割った余りは $a_{n+1}x+b_{n+1}$ となります.そこで,x^n を $x^2-6x-12$ で割った商を設定して式を作ります.整式の問題は,言葉で与えられていることが多いので自分で商や余りを設定して式を作らなければいけません.あとは,解答のように両辺に x をかけて x^{n+1} を $x^2-6x-12$ で割った余りを求めますが,このままでは余りが 2 次式になってしまうので,さらに (1) と同じように式変形をして余りが 1 次式以下になるようにします.

(3) は,類題を解いたことがなければ難しいと思います.まずは,$n=2, 3$ などで答えとなる素数を見つけることから始めます.(いわゆる実験をします) そうすると 2, 3 が答えになるだろうなという予想ができますから,2, 3 以外の素数 p が存在するとして矛盾を導きます (背理法).普段は,n を大きくしていきますが,今回は a_2, b_2 が 2, 3 以外の素数を持っていないことから,n を小さくして最終的に $n=2$ まで下げていくことを考えます.