36 （′81　東京大） 【難易度】 … 標準

放物線 $y=x^2$ を C で表す．C 上の点 Q を通り，Q における C の接線に垂直な直線を，Q における C の法線という．$0 \leqq t \leqq 1$ とし，次の 3 条件を満たす点 P を考える．

(イ) C 上の点 $\mathrm{Q}(t,\, t^2)$ における C の法線の上にある．

(ロ) 領域 $y \geqq x^2$ に含まれる．

(ハ) P と Q の距離は $(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$ である．

t が 0 から 1 まで変化するとき，P の描く曲線を C' とする．このとき，C と C' とで囲まれた部分の面積を求めよ．

【テーマ】：軌跡と面積

方針

点 P の座標は，ベクトルを用いて計算すると楽に求められます．

♣ ♠

解答

$y'=2x$ であるから，接線の方向ベクトル $\vec{\ell}$ は，$\vec{\ell}=(1,\,2t)$ である．よって，点 Q における放物線 C の法線に平行なベクトル $\vec{m}$ は，実数 k を用いて，

$$\vec{m}=k(-2t,\,1)$$

と表すことができる．条件 (ロ) より，$k>0$ であり，条件 (ハ) より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|=(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{QP}} \parallel \vec{m}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QP}}&=(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(-2t,\,1) \quad ☞ \boxed{\text{解説}}\\&=(t-t^2)(-2t,\,1)\\&=(-2t^2+2t^3,\,t-t^2)\end{aligned}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}\\&=(t,\,t^2)+(-2t^2+2t^3,\,t-t^2)\\&=(t-2t^2+2t^3,\,t)\end{aligned}$$

である．$\mathrm{P}(X,\,Y)$ とおくと，

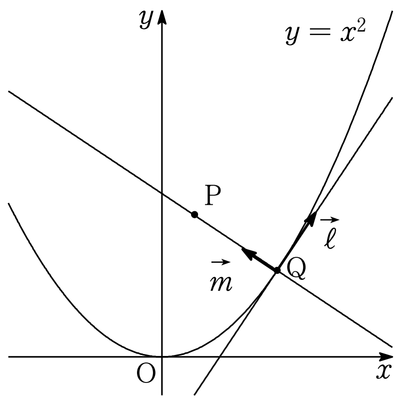
$$X=t-2t^2+2t^3,\quad Y=t$$

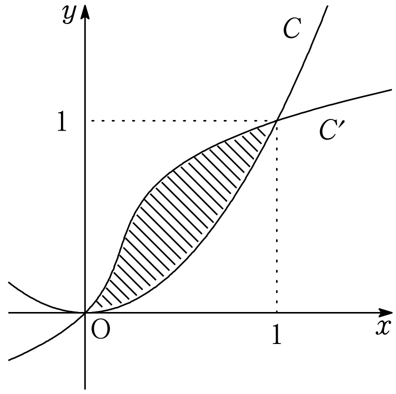
であるから，t を消去して，

$$X=Y-2Y^2+2Y^3$$

を得る．ゆえに，曲線 C' の方程式は，

$$x=y-2y^2+2y^3 \quad (0 \leqq y \leqq 1)$$





である．

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy}&=1-4y+6y^2\\&=6\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}>0\end{aligned}$$

であるから，x は y について単調増加である．これより，曲線 C' の概形は上図のようになるので，C と C' で囲まれた部分は図の斜線部分である．この斜線部分の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\left\{\sqrt{y}-(y-2y^2+2y^3)\right\}dy\\&=\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}y+\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{2}y^4\right]_0^1\\&=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

様々な解法がありますが，ベクトルを用いた解法が単純明快でしょう．他にも，法線の方程式を求め，点 $\mathrm{P}(X,\,Y)$ とおいて，条件 (ロ) と (ハ) を満たすように，式を作り $X,\,Y$ の関係式を求める方法や，90° の回転を行列を用いて処理することもできます．

ベクトルを用いて解く方法では，ベクトルの回転と大きさの調整に慣れていないと難しく感じます．実際にあまり経験をしたことがない人が多く，慣れるまでは演習が必要です．この解法のポイントは，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ を求める部分にあります．これは，次のようにして求めています．

まず，$\vec{m}$ を求めます．これは，$\vec{\ell}$ と垂直なベクトルなので，$\vec{\ell}$ の成分を入れ替えて片方の符号を変えればいいだけです．これで $\vec{\ell}$ と $\vec{m}$ の内積が 0 になるため $\vec{\ell}$ と $\vec{m}$ は必ず直交します．次に向きですが，条件 (ロ) があるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=k(-2t,\,1)\ (k>0)$$

となることが分かります．もしも $\vec{m}=(2t,\,-1)$ としていたならば，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=k(2t,\,-1)\ (k<0)$ になります．x 座標と y 座標の値が増えるのか減るのかに着目すれば k の符号が定まります．さらに，条件 (ハ) があるので，$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right|$ を考えます．そのために，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の単位ベクトルを求めます．あとは大きさが $(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$ になればよいので，単位ベクトルにこれをかければ，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の完成です．

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(-2t,\,1)}_{\overrightarrow{\mathrm{QP}}\text{ の単位ベクトル}}$$

慣れてしまえば一瞬で終わる作業なのですが，慣れるまではこのような手順をしっかりと確認しながら一つ一つ理解しましょう．

面積を求める際は，C' のグラフがどのようになるかが問題となりますが，$\dfrac{dx}{dy}$ で単調性がわかれば正確なグラフをかく必要はありません．C' と C の上下関係がわかればよいので，大まかなグラフで十分です．