35 （'02　一橋大） 【難易度】 … やや難

最初の試行で 3 枚の硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く．次の試行で残った硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く．以下この試行をすべての硬貨が取り除かれるまで繰り返す．

（1） 試行が 1 回めで終了する確率 p_1，および 2 回めで終了する確率 p_2 を求めよ．

（2） 試行が n 回以上行われる確率 q_n を求めよ．

【テーマ】：独立・反復試行の確率

方針

(1) は，すべての場合を考えれば求められます．(2) は，余事象を考えましょう．

♣ ♠

解答

（1） 試行が 1 回目で終了するのは，すべての硬貨が裏となるときであるから，求める確率は，

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{8}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

2 回目で終了するのは，1 回目で少なくとも 1 枚は表が出て 2 回目ですべて裏であればよいので，1 回目の表の枚数で場合分けをすると，

（i） 1 枚だけ表のとき，　${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2$

（ii） 2 枚だけ表のとき，　${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$

（iii） 3 枚とも表のとき，　$\left(\frac{1}{2}\right)^3$

したがって，求める確率は，

$$\begin{aligned} p_2 &= {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} \\ &= \boldsymbol{\frac{19}{64}} \cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

（2） ある硬貨が k 回目までに取り除かれないのは，k 回とも表が出るときであるから，ある硬貨が k 回目までに取り除かれる確率は，余事象の確率より，

$$1 - \frac{1}{2^k}$$

である．$n \geqq 2$ のとき，試行が n 回以上行われないのは，$n-1$ 回目までにすべての硬貨が取り除かれるときであるから，その確率は，

$$\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^3$$

である．ゆえに，求める確率は，余事象の確率より，

$$q_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^3 = \frac{3}{2^{n-1}} - \frac{3}{4^{n-1}} + \frac{1}{8^{n-1}}$$

であり，これは $n=1$ のときも満たしている．ゆえに，

$$q_n = \boldsymbol{\frac{3}{2^{n-1}} - \frac{3}{4^{n-1}} + \frac{1}{8^{n-1}}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1) では，p_2 を求める際に表が出た枚数で場合分けを行ったが，(2) と同様に考えても求めることができます.

(2) は，(1) のように表が出た枚数で場合分けを行うと，n 回という一般的な状況では解決するのは困難です．そこで，試行が n 回以上行われない場合の確率を考えることがポイントになります.