34 ('12　大阪教育大) 【難易度】… 標準

n は自然数とする．次の問いに答えよ．

（1）次に不等式を示せ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2$$

（2）$x>0$ のとき，次の不等式を示せ．

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$$

（3）次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}k\sin\frac{1}{k}\right)$$

【テーマ】：関数の極限

方針

（1）は，面積の比較をして不等式を作ります．（2）は，差をとって微分します．（3）は，（1)，（2）の結果を用います．

♣ ♠

解答

（1）**【証明】**

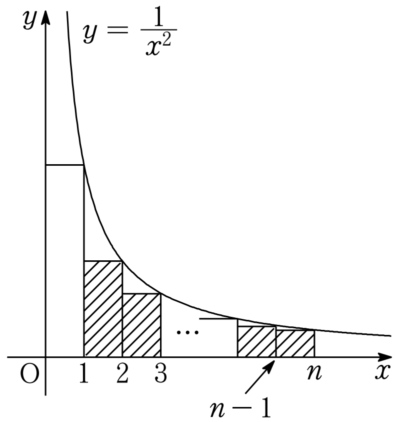
右図において，長方形の面積と $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x=1$, $x=n$, x 軸で囲まれる部分の面積の大小を比較して，

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<\int_1^n\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n=-\frac{1}{n}+1$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}<2$$

となり，示された． **（証明終）**



（2）**【証明】**

$f(x)=x-\sin x$ とおくと，$f'(x)=1-\cos x\geqq 0$ であるから，$x>0$ で $f(x)$ は単調増加である．$f(0)=0$ であるから，$x>0$ で $f(x)>0$ が成り立ち，

$$\sin x<x\ \cdots\cdots ①$$

が示された．また，$g(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)$ とおくと，

$$g'(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right),\ \ g''(x)=-\sin x+x=f(x)>0$$

であるから，$x>0$ で $g'(x)$ は単調増加であり，$g'(0)=0$ であるから，$x>0$ で $g'(x)>0$ が成り立つ．よって，$g(x)$ は単調増加であり，$g(0)=0$ であるから，$x>0$ で $g(x)>0$ が成り立つので，

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x\ \cdots\cdots ②$$

が示された．

①, ② より，$x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$ が示された. **（証明終）**

(3) (2) より，$x=\dfrac{1}{k}(>0)$ とおくと，

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{6k^3}<\sin\frac{1}{k}<\frac{1}{k} \iff 1-\frac{1}{6k^2}<k\sin\frac{1}{k}<1 \quad (\because\ k>0)$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{6k^2}\right)<\sum_{k=1}^{n}\left(k\sin\frac{1}{k}\right)<\sum_{k=1}^{n}1$$

$$n-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=1}^{n}\left(k\sin\frac{1}{k}\right)<n \iff 1-\frac{1}{6n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sin\frac{1}{k}\right)<1 \cdots\cdots ③$$

(1) で示した不等式の両辺に $-\dfrac{1}{6n}<0$ をかけて，両辺に 1 を加えると，

$$2>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \iff -\frac{1}{6n}\cdot 2<-\frac{1}{6n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \iff 1-\frac{1}{3n}<1-\frac{1}{6n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \cdots\cdots ④$$

となるので，③, ④ より次式が成り立つ.

$$1-\frac{1}{3n}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sin\frac{1}{k}\right)<1$$

$n\to\infty$ のとき，$\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)\to 1$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sin\frac{1}{k}\right)=\mathbf{1}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である.

◇ ♡

解説

(1) は，何度か経験していると方針がすぐに浮かぶ問題です．逆に，方針が浮かばなかった人はこのような問題に不慣れである可能性が高いので，十分に類題演習をしておきましょう．また，この問題は次のように，数列の和を使っても示すことができます.

別解

(1) の別解

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}&=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} && \text{☜ 次の式変形をするために } k=1 \text{ のときだけを和から除く.}\\&<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} && \text{☜ 分母を小さくすれば分数の値は大きくなる.}\\&=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) && \text{☜ 部分分数分解}\\&=1+\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}\\&=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)\\&=2-\frac{1}{n}\\&<2\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ は計算できませんが，分母を連続する 2 つの整数の積にすれば部分分数分解ができるので，計算できるようになります.

(2) は，微分をして単調性を調べれば示すことができます．基本問題なので，確実にできるようにしましょう.

(3) は，(1), (2) の結果をどのように使うかが試される問題です．(2) で $x=\dfrac{1}{k}>0$ とおくことがポイントになります．ただし，前問の結果を使うときは仮定（ここでは，$x>0$）が満たされていないといけないので，そのチェックを忘れないようにしましょう.